



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Problemas nodales inversos para ecuaciones ordinarias de segundo orden**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área  
Ciencias Matemáticas

**Cristian Scarola**

Director de tesis: Dr. Juan Pablo Pinasco

Buenos Aires, Mayo de 2016.

Fecha de defensa: 14 de Septiembre de 2016.



*A mi familia.*



---

# Problemas nodales inversos para ecuaciones ordinarias de segundo orden

(Resumen)

En esta tesis centramos nuestra atención en la ecuación de Sturm-Liouville de segundo orden

$$-u'' = \lambda\rho(x)u, \quad x \in (0, 1),$$

con cierta condición de borde homogénea. Estudiamos la densidad asintótica de los ceros de las autofunciones y analizamos el problema inverso de caracterizar la función peso  $\rho$  a partir de los ceros.

Consideramos también el problema para el operador  $\Delta_\mu$ , definido a partir de una medida Boreliana  $\mu$  soportada en un conjunto posiblemente fractal, y estudiamos cuándo y cómo puede recuperarse el peso en este caso. Para este problema es necesario un mayor análisis del crecimiento de los autovalores, y de la dimensión espectral asociada a  $\mu$ . Proponemos una dimensión que acota superiormente la dimensión espectral de estos operadores, y obtenemos cotas inferiores de los autovalores.

**Palabras Claves:** Problema inverso; autovalores; puntos nodales;  $\mu$ -Laplaciano; dimensión espectral.



---

# Inverse nodal problems for second order differential equations

(Abstract)

In this thesis we focus on the second order Sturm-Liouville equation

$$-u'' = \lambda\rho(x)u, \quad x \in (0, 1),$$

with some homogeneous boundary condition. We study the asymptotic density of zeros of eigenfunctions and the inverse problem of characterizing the weight function  $\rho$  knowing the zeros of eigenfunctions.

Given a Borel measure  $\mu$ , we also study this problem for fractal Laplacians  $\Delta_\mu$ . However, a deeper knowledge of the eigenvalues and the spectral dimension is needed, so we propose a new fractal dimension which bounds by above the spectral dimension, and we obtain lower bounds for the eigenvalues.

**Key words:** Inverse problem; eigenvalues; nodal points;  $\mu$ -Laplacian; spectral dimension.





---

## Agradecimientos

Quiero agradecerle a todos los que hicieron posible que hoy esten leyendo estas lineas.

Primero a Juampa, por ayudarme a derribar el mito de que no podés terminar esto sin odiar a tu director. Muy por el contrario, yo encontré un maestro y, mas aún, un amigo. Gracias por la paciencia, la presión, el optimismo, las gastadas, las charlas sobre cualquier cosa, la constante motivación, aunque algunas veces hubo que saber encontrarla, GRACIAS!.

A Ursula, por brindarme todo su apoyo desde aquel 13 de septiembre de 2009 cuando me presenté. Por su interés y asistencia desde el primer momento, son cosas que a veces cuesta encontrar. Por ayudarme a dar con Juan Pablo, y por darnos una mano cada vez que la necesitamos.

A la UBA y al CONICET, por las becas con las que conté para llevar adelante esta tesis. A los departamentos de matemática de la UNLPam y la UBA, y a sus docentes, por formarme y darme un lugar para trabajar. A los grupos de ecuaciones diferenciales y análisis armónico, por los seminarios, los congresos y darme un entorno cómodo para investigar: Noemi, Ricardo, Carlos, Irene, Sigrid, Johana, Pablo, Elona, Jorge, Rela, Julián, Julio, Nicolas, Acosta, Tico, Ojea, Marian, Coty, Cuna, Maurette, Ariel. De exactas, quiero agregar a Patu, que me simplificó el arranque, al Colo, Anita Ferrari, Ale Quintero, Muro, Vendra, Carando, Damian, Pacetti, Scotti, Clarita, Jan y los que me estaré olvidando.

A Delpe, que me facilitó la adaptación a este lugar cuando apenas vine, tanto académica como socialmente.

A Monica, por su incondicionalidad y su amistad, a Deby y Lili, por su capacidad y predisposición siempre.

A la oficina E25, por enseñarme a valorar lo que vendría.

A la 2046, la mejor: Dani G., Roman, Turco, Mazzi, Savra, Vicky, Caro, Ani, Andrea, Anto, Kordon, Jesus, Luis, Rocio. A la 2038: Dani K., Camporino, Charly, Siro, Mereb, Blanc, Mauro y los muchos varios. Con personas asi, uno nunca se puede arrepentir de haber venido.

A Frevenza y Borthy, dos hermanos que me dió Buenos Aires, no hubiese sido igual sin ellos.

Al fobal: de los jueves, en todas sus facetas, por darme una lesión de donde aprender; a Cebo-llitas, por la magia; y a Spika, por enseñarme que siempre se puede estar peor.

A Eduardo y Mary, por confiar en mi, y hacer posible que la decisión de venirme a Buenos Aires

fuera fácil. No hay palabras para agradecer lo que hicieron por nosotros.

A Andrea Gatica, por empujarme cuando terminé la licenciatura, el primer escalón fue gracias a vos.

A Ale y Guilo, por su ayuda al principio, y bancar siempre.

A Luis María Fiorini, por ser mi maestro desde chico, y apoyarme siempre. Esto también es para usted profe.

A la familia Elizalde Capellino, porque apoyaron desde el comienzo.

A mis abuelos. A mis viejos, por enseñarme a hacer que las cosas pasen, por confiar en mi cuando todo esto empezó y nunca dejarme bajar los brazos. A Talia y Andy, a Marti y Valen, por su cariño y por estar siempre.

A Vani, por hacer que cada día cuente, por ordenar este desorden, por ser todo.

---

# Índice general

|   |            |
|---|------------|
| <b>Resumen</b>  | <b>v</b>   |
| <b>Abstract</b>   | <b>vii</b> |
| <b>Agradecimientos</b>                                      | <b>x</b>   |
| <b>1. Introducción</b>                                      | <b>1</b>   |
| 1.1. Estructura de la tesis . . . . .                       | 6          |
| <b>2. Preliminares</b>                                      | <b>8</b>   |
| 2.1. Notación . . . . .                                     | 8          |
| 2.2. Desigualdades elementales . . . . .                    | 9          |
| 2.3. Teoría de la Medida . . . . .                          | 9          |
| 2.3.1. Medida de Hausdorff . . . . .                        | 12         |
| 2.3.2. Dimensión de Hausdorff . . . . .                     | 13         |
| 2.3.3. Otras dimensiones de conjunto . . . . .              | 15         |
| 2.3.4. Dimensión Box y Packing . . . . .                    | 16         |
| 2.3.5. Conjuntos Autosimilares . . . . .                    | 20         |
| 2.3.6. Funciones medibles e integración . . . . .           | 20         |
| 2.4. Funciones de variación acotada . . . . .               | 22         |
| 2.5. Espacios $L^p$ . . . . .                               | 23         |
| 2.6. El espacio de Sobolev . . . . .                        | 24         |
| 2.7. Teorema de Prokhorov y Teorema de Helly . . . . .      | 25         |
| 2.8. El Laplaciano $\Delta_\mu$ y sus autovalores . . . . . | 27         |
| 2.9. Comportamiento asintótico de los autovalores . . . . . | 30         |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>3. Problema inverso nodal</b>                          | <b>31</b> |
| 3.1. Notación   | 31        |
| 3.2. Autovalores y ceros de autofunciones                 | 32        |
| 3.3. Problema de autovalores                              | 33        |
| 3.4. Problema nodal inverso en un intervalo               | 35        |
| 3.4.1. Número de ceros                                    | 35        |
| 3.4.2. Un algoritmo para $\rho$                           | 38        |
| 3.4.3. Condiciones de borde                               | 39        |
| 3.4.4. Pesos que cambian de signo                         | 40        |
| 3.4.5. Conjunto denso de pares de nodos                   | 41        |
| 3.5. Problema Inverso en la semi-recta                    | 43        |
| 3.5.1. La sucesión de medidas es concentrada              | 44        |
| 3.5.2. Autovalores  | 46        |
| 3.5.3. Problema nodal inverso en la semi-recta            | 47        |
| 3.5.4. Unicidad dado un conjunto denso de ceros           | 50        |
| 3.5.5. Comentarios finales                                | 51        |
| <b>4. Autovalores de <math>-\Delta_\mu</math></b>         | <b>53</b> |
| 4.1. Desigualdades tipo Lyapunov                          | 54        |
| 4.2. Convoluciones Bernoulli infinitas                    | 56        |
| 4.2.1. Una cota inferior para el primer autovalor         | 56        |
| 4.2.2. Cotas inferiores y superiores para autovalores     | 57        |
| 4.3. El caso $\mathbb{R}^N$                               | 62        |
| 4.4. Problema Inverso para $-\Delta_\mu$                  | 64        |
| 4.4.1. Concentración de ceros en $\text{sop}(\mu)$        | 64        |
| 4.4.2. Análisis local                                     | 66        |
| 4.4.3. Caracterización de la medida                       | 67        |
| <b>5. Una cota geométrica para la dimensión espectral</b> | <b>70</b> |
| 5.1. Otra noción de dimensión                             | 71        |
| 5.2. Una cota superior para la dimensión espectral        | 73        |





# 1

---

## Introducción

En esta tesis vamos a concentrarnos en principio en ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden de la forma

$$-u'' = \lambda\rho(x)u, \quad x \in (0, 1) \quad (1.0.1)$$

con alguna condición de borde homogénea. Asumiremos que  $\lambda$  es un parámetro real, y a  $\rho$  la llamaremos una función peso.

Un problema clásico es el de determinar la función peso desconocida utilizando información espectral. Usualmente, esta función describe propiedades físicas tales como la tensión o la distribución de masa de una cuerda, y la difusividad o conductividad de un material, ya que un simple cambio de variables la relaciona con la función  $\sigma$  en la ecuación

$$-(\sigma(x)v')' = \lambda v.$$

El primer resultado para este tipo de problemas fue obtenido por Goran Borg [Bo], quien probó que  $\rho$  puede ser determinado a partir de dos sucesiones de autovalores, por ejemplo las sucesiones de autovalores de (1.0.1) con condiciones de borde Dirichlet y Neumann. Más tarde, Gelfand y Levitan mostraron en [GL] que una sucesión de autovalores basta, junto con una sucesión de constantes,  $u_n'(0)$ , donde  $u_n$  es una autofunción normalizada correspondiente a  $\lambda_n$ . Observemos que en estos casos se necesita un profundo conocimiento de los autovalores y las autofunciones.

Desde un punto de vista práctico, cuando queremos utilizar dos sucesiones de autovalores diferentes, se deben cambiar las condiciones de borde, y esto no siempre es posible (pensemos en un tensor de un puente, o una barra fija en una estructura que no se puede quitar). Además, tampoco es fácil obtener las constantes de las autofunciones normalizadas.

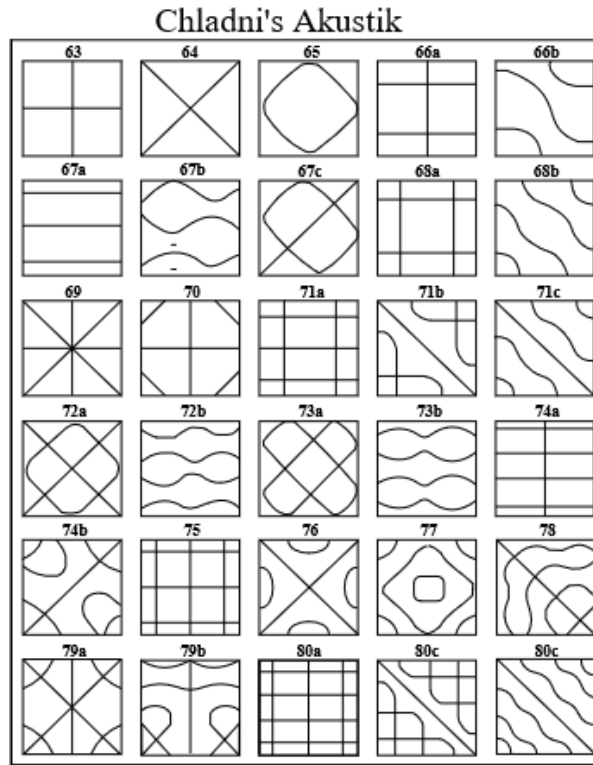


Figura 1.1: Figuras de Chladni, [Chl2].

Sin embargo, en algunos casos de interés es posible determinar los nodos de las autofunciones. Históricamente podemos remontarnos a los experimentos de Robert Hooke en 1680, quien obtuvo las líneas nodales de placas vibrantes cubriéndolas con arena y observando dónde se acumulaba. Más tarde, en 1787, Ernst Chladni repitió y publicó este tipo de experimentos en [Chl], y en 1831 Michael Faraday describió las ondas Faraday, que aparecen en la superficie de un fluido contenido en un recipiente que vibra (ver [Far]).

En la actualidad se monitorea la vibración de vigas, cuerdas, tensores y muchas otras estructuras, y el daño o desgaste del material se infiere por el comportamiento de los puntos nodales de las autofunciones (ver por ejemplo [DM]). Para esto, se utilizan varios procedimientos: los nodos pueden determinarse escaneando la estructura vibrante con un laser (como los que se utilizan en controles de tráfico) y midiendo los puntos cuya velocidad es cero, ver [HM2] y el capítulo 12 del libro de Gladwell [Glad].

Para una cuerda, se la fuerza a entrar en resonancia variando una fuente de sonido, y se puede aplicar lo anterior, aunque Cha, Dym y Wong [CDW] desarrollaron otro método que consiste en colgar una masa con un resorte, y cada vez que la masa se localiza en un nodo, no es afectada por las vibraciones de la cuerda y quedará estacionaria.

Volviendo al problema (1.0.1), para pesos positivos sabemos que el problema tiene una sucesión



simple de autovalores  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ , el  $n$ -ésimo autovalor  $\lambda_n$  se comporta asintóticamente como

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{\int_0^1 \sqrt{\rho} dx} \right)^2 + o(n^2), \quad (1.0.2)$$

y la autofunción asociada  $u_n$  tiene exactamente  $n$  dominios nodales en  $[0, 1]$ . Entendemos por dominio nodal a un conjunto conexo maximal en  $(0, 1)$  donde la solución no cambia de signo.

Para condiciones de borde tipo Dirichlet y pesos positivos, la caracterización del peso fue resuelta en los últimos veinte años de tres maneras diferentes:

- El primer trabajo en este tema fue de Joyce McLaughlin en [Mc], donde se caracterizó el peso de manera única en función de los ceros de las autofunciones. Posteriormente, con un conjunto denso de pares de nodos consecutivos, Hald and McLaughlin en [HMc2] obtuvieron cotas para las longitudes de dominios nodales, y dieron un algoritmo para construir funciones a trozos  $\rho_n$  que convergen al peso  $\rho$ . Ellos consideran funciones positivas  $\rho \in BV([0, 1])$  acotadas lejos de cero. Esta última hipótesis es crucial en su prueba, ya que la variación total de  $\ln(\rho)$ ,  $V[\ln(\rho)]$ , es necesaria para tener una mejor estimación para autovalores que la ecuación (1.0.2),

$$\lambda_n^{1/2} = \frac{\pi n}{\int_0^1 \sqrt{\rho} dx} + O(V[\ln(\rho)]). \quad (1.0.3)$$

También necesitan una estimación muy precisa de la longitud de los dominios nodales, y esta estimación depende de una cota inferior positiva del peso (ver Lema 2 en [HMc2]).

Dado que para coeficientes con poca regularidad no basta con un conjunto denso arbitrario de nodos para determinar  $\rho$ , en [HMc2] se requiere además que si  $x_j^n$  está en el conjunto, entonces  $x_{j-1}^n$  o  $x_{j+1}^n$  también esté. En [HMc1], Hald y McLaughlin prueban que un conjunto denso de ceros puede caracterizar un peso  $\rho$ , positivo y tal que  $\rho'' \in L^1$ .

- Dados los ceros de una sucesión de autofunciones, para  $\rho \in C^2([0, 1])$ , Shen en [Sh] estudió las longitudes de dominios nodales, y mostró que vale la siguiente fórmula:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n f(x_j) = \frac{\int_0^1 f(x) \sqrt{\rho(x)} dx}{\int_0^1 \sqrt{\rho(x)} dx}.$$

El peso puede ser recuperado usando la teoría de momentos, ya que se puede calcular el momento  $c_n$  con  $f(x) = x^n$ . Mas tarde, Shen y Tsai en [ST] obtuvieron  $\rho \in C^2([0, 1])$  a partir de los ceros y una subsucesión de autovalores. La condición de regularidad  $\rho \in C^2([0, 1])$  es necesaria dado que utilizan aproximaciones de las autofunciones para estimar las longitudes de los dominios nodales.

- En la prueba de Martínez-Finkelshtein et al. en [MF], asumen que una solución tiene la fórmula asintótica

$$u \approx C_1 [\lambda \rho]^{-1/4} \sin \left( C_2 + \int_0^x [\lambda \rho(t)]^{1/2} dt \right),$$

y se tiene

$$-\frac{1}{4} \frac{\rho''}{\lambda \rho^2} + \frac{5}{16} \frac{\rho'}{\lambda^2 \rho^3} \ll 1$$

para  $\lambda$  suficientemente grande. En este caso, se determina  $\rho$  utilizando el comportamiento asintótico de  $\lambda_n$  (1.0.2) y la fórmula explícita para los ceros del seno.

Sorprendentemente, no hay resultados similares para pesos indefinidos. Al permitir que  $\rho$  cambie de signo, pueden estudiarse problemas donde el peso está relacionado con el índice de refracción de un medio, y problemas de dinámica de poblaciones donde el peso puede representar la tasa de crecimiento intrínseca de una especie, positivo (resp. negativo) en la zona de habitat favorable (resp. desfavorable), ver [CC, LoY]. Recientemente, Eckhardt y Kostenko estudiaron el problema inverso espectral para pesos indefinidos en términos de la función de Weyl-Titchmarsh, motivados por el trabajo de las ecuaciones de Camassa-Holm y Hunter-Saxton, ver [EK] para mas detalles.

El primer aporte de esta tesis es *resolver el problema inverso de caracterizar  $\rho$ ,  $\alpha$ , y  $\beta$ , conocidos los ceros de las autofunciones*, para el siguiente problema de Sturm-Liouville,

$$-u'' = \lambda \rho(x) u, \quad x \in (0, 1) \tag{1.0.4}$$

con condiciones de borde homogéneas

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)u(0) - \sin(\alpha)u'(0) &= 0 \\ \cos(\beta)u(1) - \sin(\beta)u'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{1.0.5}$$

donde  $\lambda$  un parámetro real,  $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta \leq \pi$ , asumiendo que  $\sqrt{|\rho|} \in BV[0, 1]$ .

Respecto de los trabajos anteriores las hipótesis sobre  $\rho$  son más débiles, sólo asumimos que  $\sqrt{|\rho|} \in BV([0, 1])$ , permitiendo que  $\rho$  cambie de signo e incluso que se anule en cierto subintervalo. Además, estos resultados no utilizan todos los ceros de una sucesión de autofunciones, veremos que es suficiente con un subconjunto denso de ceros, y otra demostración de que alcanza con un subconjunto denso de pares consecutivos de ceros. También veremos que es posible determinar numéricamente los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  involucrados en las condiciones de borde, a posteriori. Estos resultados se obtienen utilizando una estimación más débil que (1.0.3), y no es necesario utilizar ninguna información de la longitud de los dominios nodales.

La prueba de estos resultados está motivada por la teoría de polinomios ortogonales. Definiremos una sucesión de medidas de probabilidad asociadas a los ceros de las autofunciones, y utilizando la convergencia débil de sucesiones de medidas concentradas (*tight*), obtenemos una medida límite que es suficiente para caracterizar  $\rho$ . Más precisamente, la función  $\sqrt{|\rho|}$  es la función de densidad de esta medida límite. La existencia de una subsucesión débilmente convergente sigue del teorema de selección de Helly, o puede probarse usando el teorema de Prokhorov, y usando argumentos de tipo Sturm se puede mostrar que toda la sucesión converge.

El segundo aporte de esta tesis es la *solución del problema inverso nodal en la semi-recta*. Cuando se trata de la semi-recta como dominio, algunos problemas inversos espectrales pueden

verse en [FY], y en [Cha], donde los coeficientes se caracterizan en términos de los autovalores y las autofunciones utilizando las técnicas clásicas introducidas por Gelfand, Levitan y Marchenko en dispersión cuántica.

Pero para el problema inverso nodal, no existen trabajos previos. Una de las razones puede ser que la solución para intervalos acotados depende de estimaciones muy precisas de las longitudes nodales y los autovalores, que involucran la variación total de  $\log(\rho)$  y por lo tanto sólo valen para pesos  $\rho$  tal que  $0 < C \leq \rho$ . En la semi-recta, esta condición se traduce en que toda solución oscile y tenga infinitos ceros, y no haya una sucesión de autovalores sino espectro continuo.

Adaptando las ideas utilizadas en el caso de un intervalo acotado, se puede caracterizar la función peso a partir de los ceros, pero para esto debemos resolver un par de problemas previos. En primer lugar, necesitamos una estimación del comportamiento asintótico de los autovalores, un problema que tiene interés de manera independiente, y que fue estudiado para el caso lineal por E. Hille en [Hi], y por Birman, Naimark, y Solomyak en [BLS, NS, BS]. El segundo problema es estudiar la convergencia de las medidas asociadas a los ceros, que detallamos al final del **Capítulo §3**. Cabe destacar que en este problema necesitamos una hipótesis adicional sobre el peso  $\rho$ , que debe ser no creciente.

Por último, otro aspecto central de esta tesis es poder utilizar este método para operadores de clases más generales, definidos en conjuntos fractales, que surgen de distintos procesos de difusión. Algunos problemas inversos espectrales para estos operadores pueden encontrarse en el libro de Dym y McKean [DMK]. Para describir los resultados, expliquemos brevemente la definición de estos operadores, más adelante se los estudiará con más detalle.

Dada una medida Boreliana  $\mu$ , positiva, con soporte compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y sin átomos, el operador Laplaciano  $-\Delta_\mu$  puede entenderse como un operador generalizado de segundo orden,

$$-\Delta_\mu u := -\frac{d}{d\mu} \frac{d}{dx} u,$$

que podemos obtener utilizando la definición original de Feller en [Fe]

$$\frac{dv(x)}{d\mu} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{\mu[x, x+h]},$$

o podemos definirlo en términos de su inverso, un operador integral de tipo Volterra-Stieltjes introducido por Krein [Kr]: diremos que  $-\Delta_\mu u = f$  si y solo si

$$u(x) = u(a) + u'(a)x + \int_a^x f(y) d\mu(y),$$

para alguna  $f \in L^2([a, b], d\mu)$ .

Utilizando herramientas usuales para problemas lineales y técnicas de procesos estocásticos y geometría fractal, se han demostrado varios resultados para este operador: existencia de soluciones para problemas tipo Sturm-Liouville bajo ciertas condiciones de borde, existencia de autovalores y autofunciones, teoremas de oscilación y comparación de soluciones, estimaciones del comportamiento asintótico de autovalores, entre muchos otros.

El problema de autovalores para el Laplaciano  $-\Delta_\mu u$  fue ampliamente analizado por Bird, Cheng, Deng, Ngai y Teplayev, ver por ejemplo [ChNg, DeNg, BNT]. En algunos de estos trabajos se incluyen varios fractales como el clásico conjunto ternario de Cantor (ver por ejemplo [Ki01, Ki02]), y también conjuntos más complejos donde se permiten solapamientos. Frieberg y Lobus en [FL] consideran este tipo de operadores y prueban cómo es el comportamiento de los ceros de las autofunciones del problema en el conjunto de Cantor.

En este problema nos interesa recuperar la medida  $\mu$  en términos de los ceros, y esto nos lleva a estudiar diferentes problemas previos. En primer lugar vamos a generalizar la desigualdad de Lyapunov, que para ecuaciones ordinarias lineales

$$u'' + w(t)u = 0$$

nos dice que si la solución tiene dos ceros consecutivos  $a$  y  $b$ , entonces

$$4 \leq (b - a) \int_a^b w(t) dt.$$

Esta desigualdad es muy útil en estabilidad, teoría de oscilaciones y problemas de autovalores. Fue redescubierta muchas veces (Hartmann la llamó ‘desigualdad de Borg’) y fue extendida a ecuaciones diferenciales ordinarias de mayor orden, ecuaciones diferenciales funcionales, operadores no lineales en espacios de Sobolev y de Orlicz, entre otros (ver [Pi01]).

Como aplicación de las desigualdades tipo Lyapunov, introduciremos una nueva noción de dimensión fractal  $D_s^\mu$ , que se vincula con la llamada *dimensión espectral*  $d_s$  asociada a un Laplaciano  $\Delta_\mu$ , que se define en términos del orden de crecimiento de los autovalores. Además, para ciertos fractales y sus medidas de Hausdorff asociadas, obtendremos esta dimensión espectral sin recurrir al *Renewal Theorem*, único método conocido hasta ahora para calcularlas, que fue introducido por Kigami y Lapidus, ver [Ki01, Ki02, KL].

## 1.1. Estructura de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el **Capítulo §2** presentamos la notación, definiciones y propiedades utilizadas a lo largo de la tesis, tanto sobre teoría geométrica de la medida como en materia de ecuaciones diferenciales y el problema inverso nodal. En las secciones finales repasamos la construcción del operador Laplaciano  $\Delta_\mu$  a partir de una medida Borel finita, y el comportamiento de sus autovalores. Algunos resultados no están citados en su forma original, sino de una forma más apropiada para nuestros propósitos. En la mayoría de estos resultados no entraremos en detalles, pero incluimos la correspondiente literatura para una mejor consulta.

En el **Capítulo §3** tratamos el problema inverso. Primero presentamos lo conocido para el problema en un intervalo acotado, y demostramos los resultados esbozados anteriormente. Incluimos también el problema en la semi-recta, y los resultados preliminares asociados.

En el **Capítulo §4** presentamos una desigualdad tipo Lyapunov para el operador  $\Delta_\mu$ . A partir de esta desigualdad, obtenemos cotas inferiores y superiores para los autovalores, y calculamos

la dimensión espectral  $d_s$  que caracteriza el crecimiento de los autovalores para algunas medidas autosimilares. Además, extendemos parcialmente los resultados del **Capítulo §3** para estos operadores.

Para finalizar, en el **Capítulo §5** introducimos una nueva dimensión,  $D_s^\mu$ , para conjuntos  $E$  contenidos en el soporte de una medida Borel positiva  $\mu$ . Mostraremos que dicha dimensión verifica importantes propiedades tales como monotonía respecto a la inclusión de conjuntos y monotonía bajo deformaciones Lipschitz, entre otras. El resultado final de este capítulo es la relación que guarda  $D_s^\mu$  con  $d_s$ , la dimensión espectral del operador  $\Delta_\mu$ .

## Publicaciones relacionadas

La mayoría de los resultados presentados en esta tesis han sido presentados en congresos o incluidos en artículos de investigación. La recuperación de las zonas de positividad y negatividad de la función peso en el caso clásico a partir de los ceros se presentó en [PS1]. Los resultados del Capítulo 3 fueron publicados en [PS3] para el caso de intervalos acotados, y en [PS4] para la semi-recta. Finalmente, parte de los resultados de los Capítulos 4 y 5 pueden verse en [PS5].

[PS1] J. P. Pinasco, C. Scarola. *Density of zeros of eigenfunctions os Sturm Liouville problems*. (Acta de Congreso) Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, Vol. 4 (2013), 129–132.

[PS2] J. P. Pinasco, C. Scarola. *Lyapunov inequalities on fractals*. (Poster) Multifractal Analysis: From Theory to Applications and Back, Banff, Canada (2014).

[PS3] J. P. Pinasco, C. Scarola. *A nodal inverse problem for second order Sturm Liouville operators with indefinite weights*. Applied Mathematics and Computation, 256 (2015), 819–830.

[PS4] J. P. Pinasco, C. Scarola. *A nodal inverse problem for a quasi-linear ordinary differential equation in the half-line*. Journal of Differential Equations 261 (2016) 1000-1016.

[PS5] J. P. Pinasco, C. Scarola. *Geometric Bounds for the spectral dimension and Lyapunov-type inequalities for fractal Laplacians* (2016). Enviado para su publicación, en referato.

# 2

---

## Preliminares

En este capítulo incluimos las herramientas preliminares que serán utilizadas a lo largo de la tesis. Algunos resultados no están citados en su forma más general, sino de manera que se ajusten mejor a nuestros objetivos. No incluiremos demasiado detalles, pero trataremos de guiar al lector en cada caso a la correspondiente referencia.

Comenzamos en la **Sección 2.1** con algo de notación. En la **Sección 2.3** se presentan las nociones básicas sobre teoría de la medida, como definición de medida, cubrimiento, medida y dimensión de Hausdorff, funciones medibles e integración. Las **Secciones 2.5** y **2.6** incluyen resultados sobre espacios  $L^p$  y el espacio de Sobolev. Finalmente, la **Sección 2.8** introduce la definición del operador  $\Delta_\mu$  para una medida  $\mu$  Borel, positiva y sin átomos, y resultados referidos al comportamiento de los autovalores y ceros de las autofunciones.

### 2.1. Notación

A lo largo de esta tesis notaremos con  $\Omega$  a un conjunto abierto del espacio euclideo  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ . Si  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, el *soporte* de  $u$  está definido como

$$\text{sop } u = \Omega \cap \overline{\{x : u(x) \neq 0\}},$$

donde se denota  $\bar{A}$  a la clausura del conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $A \subset \Omega$ ,  $\bar{A}$  es compacto y  $\bar{A} \subset \Omega$ , escribiremos  $A \subset\subset \Omega$ . El *borde* de un conjunto  $A$  se define como

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{\{\mathbb{R}^n \setminus A\}}.$$

Denotamos  $\chi_A$  la función característica de  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

Utilizaremos la notación estándar  $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$  para el conjunto de funciones  $k$  veces diferenciables sobre un dominio  $\Omega$ , para  $m \in \mathbb{N}$ , y  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Vamos a abreviar  $C^k(\Omega) \equiv C^k(\Omega, \mathbb{R})$  y  $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$  para el conjunto de funciones continuas sobre  $\Omega$ . Los subespacios  $C_0(\Omega)$  y  $C_0^\infty(\Omega)$  corresponden a aquellas funciones en  $C(\Omega)$  y  $C^\infty(\Omega)$  que tienen soporte compacto en  $\Omega$ .

Sea  $\Omega$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . La función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es *Lipschitz continua* si para todo  $x, y \in \Omega$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|,$$

para alguna constante  $C$ . Diremos que  $f$  es una función *bi-Lipschitz* si se verifica

$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_2|x - y| \quad x, y \in \Omega,$$

donde  $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ . Si  $0 \leq \gamma \leq 1$  y  $f$  satisface

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad x, y \in \Omega,$$

para alguna constante  $C$ , llamaremos a  $f$  *Hölder continua de exponente  $\gamma$* . Claramente si  $f$  es Lipschitz (Hölder) continua, es continua.

El espacio de todas las funciones cuya derivada parcial de  $k$ -ésimo orden es Hölder continua de exponente  $\gamma$  en  $\Omega$ , se denota como  $C^{k,\gamma}(\Omega)$ , y es un subespacio de  $C^k(\Omega)$ .

## 2.2. Desigualdades elementales

**Definición 2.1.** Dado  $n$  números positivos  $\{a_i\}_{i=1}^n$ , tenemos:

$$\text{Media Aritmética : } A = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n},$$

$$\text{Media Harmónica : } H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

**Lema 2.2.** Dados  $n$  números positivos  $\{a_i\}_{i=1}^n$ , tenemos que  $H \leq A$ , con igualdad si y solo si  $a_i = a_j$  para cualquier par  $1 \leq i, j \leq n$ .

## 2.3. Teoría de la Medida

A continuación presentamos los conceptos básicos sobre teoría de la medida que necesitaremos. Para más detalles sobre estos temas pueden verse [Fal01, Fal02, Fal03, Fed, Ma].

**Definición 2.3.** Una medida  $\mu$  en  $\mathbb{R}^n$  es una función que asigna un valor no negativo, posiblemente  $\infty$ , a cada subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que

- a.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- b. si  $A \subset B \subset \Omega$ , entonces  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ;

c. si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión numerable de conjuntos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

con igualdad en caso de que los  $A_i$  sean conjuntos Borel disjuntos.

La definición anterior puede interpretarse como lo que normalmente se llama una medida exterior, para la cual los conjuntos Borelianos son  $\mu$ -medibles. Mas específicamente, tenemos la siguiente definición.

**Definición 2.4.** Sea  $\mu$  una medida en  $\Omega$ , diremos que un conjunto  $E \subset \Omega$  es  $\mu$ -medible si para todo subconjunto  $A \subset \Omega$  se verifica que

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \setminus E),$$

o equivalentemente

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B),$$

para todo  $A \subset E$  y  $B \subset \Omega \setminus E$ .

**Observación 2.5.** Notemos que en caso de que  $\mu(A) = 0$  entonces el conjunto  $A$  es  $\mu$ -medible;  $A$  es  $\mu$ -medible si y solo si  $\Omega \setminus A$  es  $\mu$ -medible; y que si  $A$  es  $\mu$ -medible y  $B \subset \Omega$ , entonces

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

**Proposición 2.6** (Ver [EG, Fal01]). Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos  $\mu$ -medibles. Entonces

1. Si  $A_n \subset A_{n+1}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

2. Si  $A_{n+1} \subset A_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , y  $\mu(A_1) < \infty$ , entonces

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

Si tomamos una colección de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{C}$ , entonces podemos definir cubrimientos de conjuntos con elementos de dicha clase.

**Definición 2.7.** Sea  $\mathcal{C}$  una colección de subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Un cubrimiento de un conjunto  $A$  de  $\mathcal{C}$  es una familia contable de elementos de  $\mathcal{C}$ ,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$



En un espacio métrico como  $\mathbb{R}^n$  podemos controlar la escala a la cual estamos cubriendo un conjunto gracias a la noción de diámetro. Mas precisamente, dada una clase de conjuntos  $\mathcal{C}$ , diremos que una familia contable  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de conjuntos de  $\mathcal{C}$  es un  $\delta$ -cubrimiento del conjunto  $A$  si verifica la definición anterior, pero además  $\text{diam}(A_n) < \delta$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Hasta aquí hemos hablado de medidas para subconjuntos  $X \subset \mathbb{R}^n$ , sin embargo a veces es necesario concentrarnos en un conjunto particular  $A$ . Especialmente si queremos medir sólo una porción de un conjunto cualquiera  $X$  que está contenida en  $A$ . Se define entonces la *restricción de la medida  $\mu$  a  $A$*  como

$$\mu|_A(X) := \mu(A \cap X).$$

Es claro que así definida,  $\mu|_A$  es una medida y su soporte está incluido en  $\bar{A}$ .

Llamaremos soporte de la medida al conjunto donde esta se concentra.

**Definición 2.8.** El soporte de la medida  $\mu$ , que notaremos  $\text{sop}(\mu)$ , es el conjunto cerrado más pequeño  $X$  tal que  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0$ .

El soporte de una medida es siempre cerrado, y el punto  $x$  está en el soporte de la medida  $\mu$  si y solo si  $\mu(B(x, r)) > 0$ , para todo radio positivo  $r$ .

Llamaremos *distribución de masa* a una medida sobre un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ , y diremos que  $\mu(A)$  es la *masa* del conjunto  $A$ . Podemos pensar intuitivamente que tomamos una masa fina y la esparcimos de alguna manera sobre un conjunto  $X$ , y así obtener una distribución de masa sobre  $X$ .

**Ejemplo 2.9** (Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ ). La medida Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  extiende la noción de longitud a una colección de conjuntos de la recta que incluye a los conjuntos borelianos. Para intervalos abiertos y cerrados, tenemos  $\mathcal{L}^1(a, b) = \mathcal{L}^1[a, b] = b - a$ . En el caso de que  $A$  es una unión finita o contable de intervalos disjuntos,  $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$ , entonces  $\mathcal{L}^1(A) = \sum (b_i - a_i)$  es la suma de las longitudes de los intervalos. De esta manera, se puede definir la medida Lebesgue  $\mathcal{L}^1(A)$  para cualquier conjunto  $A$  como

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \right\},$$

es decir, miramos todos los cubrimientos de  $A$  por colecciones contables de intervalos, y tomamos el menor valor posible de las longitudes.

De forma similar se define la *medida de Lebesgue  $n$ -dimensional* como una extensión del volúmen  $n$ -dimensional a una clase mayor de conjuntos, es decir

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\},$$

tomando nuevamente el ínfimo sobre todos los posibles cubrimientos de  $A$ .

Veamos ahora como es la estructura de los conjuntos medibles para una medida dada.

**Definición 2.10.** Sea  $\mathcal{C}$  una clase de subconjuntos de un conjunto  $\Omega$ . Diremos que  $\mathcal{C}$  es una  $\sigma$ -álgebra si

- a.  $\emptyset \in \mathcal{C}$ .
- b. Si  $A \in \mathcal{C}$ , entonces  $A^C \in \mathcal{C}$ .
- c. Si  $A_1, A_2, \dots$  están en  $\mathcal{C}$ , entonces  $\bigcup_i A_i \in \mathcal{C}$ .

La clase de todos los subconjuntos  $\mu$ -medibles de  $\Omega$  forman una  $\sigma$ -álgebra. La  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}^n$  mas pequeña que contiene a los conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  se llama  $\sigma$ -álgebra de Borel.

**Definición 2.11.** Diremos que

- a.  $\mu$  es *regular* si para cada conjunto  $A \subset X$  existe un conjunto  $\mu$ -medible  $B$  tal que  $A \subset B$  y  $\mu(A) = \mu(B)$ .
- b.  $\mu$  es *Borel regular* si cada conjunto abierto es  $\mu$ -medible y si para cada  $A \subset X$  existe un conjunto Borel  $B \subset X$  tal que  $A \subset B$  y  $\mu(A) = \mu(B)$ .
- c.  $\mu$  es una medida *Radon* si  $\mu$  es Borel regular y  $\mu(K) < \infty$  para cada conjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.12.** Una medida  $\nu$  es absolutamente continua respecto a  $\mu$  en  $[a, b]$  si existe alguna función  $q \in L^1([a, b], \mu)$  tal que, para cualquier  $[c, d] \subset [a, b]$ ,

$$\nu[c, d] = \int_c^d q(x) d\mu(x).$$

### 2.3.1. Medida de Hausdorff

A continuación haremos un breve repaso sobre la medida y dimensión de Hausdorff, que será de utilidad para el entendimiento de la segunda parte de esta tesis. Para mayores detalles sobre el tema pueden verse los libros de Falconer [Fal01, Fal02, Fal03] o Rogers [Rog].

Recordemos primero que si  $A$  es un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}^n$ , el *diámetro* de  $A$  está definido como

$$|A| = \sup \{|x - y| : x, y \in A\},$$

es decir, la mayor distancia que separa dos puntos de  $A$ . Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  y  $s$  un número no negativo, la medida  $s$ -dimensional Hausdorff de  $F$  a escala  $\delta > 0$  se define como

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } F \right\}. \quad (2.3.1)$$

A medida que  $\delta$  decrece, la clase de cubrimientos apropiados de  $F$  disminuye, y entonces el ínfimo crece. Por lo tanto,

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F), \quad (2.3.2)$$

que llamaremos la medida  $s$ -dimensional Hausdorff de  $F$ .

Es natural preguntarse cómo se relacionan la medida Hausdorff con exponente entero y la correspondiente medida Lebesgue. En  $\mathbb{R}^n$  la medida  $n$ -dimensional de Hausdorff coincide, salvo una constante, con la medida Lebesgue. Mas precisamente, si  $F$  es un subconjunto Borel de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \text{vol}^n(F),$$

donde  $c_n$  es el volúmen de una bola unitaria de  $\mathbb{R}^n$  (ver [EG]).

Las propiedades de escala para las medidas Lebesgue son bien conocidas: la longitud escala con un factor  $\lambda$ , el área lo hace con un factor  $\lambda^2$ , el volúmen con  $\lambda^3$ . etc. La medida  $s$ -dimensional Hausdorff escala con un factor  $\lambda^s$ . Las siguientes proposiciones pueden encontrarse en [Fal03].

**Proposición 2.13** (Propiedad de escala). *Sea  $S$  una transformación con factor de escala  $\lambda > 0$ . Si  $F \subset \mathbb{R}^n$ , entonces*

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F). \quad (2.3.3)$$

**Proposición 2.14.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función Hölder  $\alpha$ , tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad x, y \in F,$$

para constantes  $c > 0$  y  $\alpha > 0$ . Entonces para cada  $s$  vale

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F). \quad (2.3.4)$$

Claramente para el caso en que  $f$  es una función Lipschitz, tenemos que

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq c^s \mathcal{H}^s(F). \quad (2.3.5)$$

Esta última desigualdad se verifica para cualquier función diferenciable con derivada acotada, ya que dicha función es necesariamente Lipschitz. En caso de que  $f$  sea una isometría tendremos la igualdad en (2.3.5), por lo que la medida de Hausdorff resulta una invariante por traslaciones y rotaciones.

### 2.3.2. Dimensión de Hausdorff

Como puede verse en la ecuación (2.3.1), para cualquier conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  y  $\delta < 1$ , el valor de  $\mathcal{H}_\delta^s(F)$  es no creciente con  $s$ , y entonces  $\mathcal{H}^s$  también lo es. De hecho, si  $t > s$  y  $\{U_i\}$  es un  $\delta$ -cubrimiento de  $F$  tenemos

$$\sum_i |U_i|^t \leq \sum_i |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_i |U_i|^s,$$

y entonces tomando ínfimo,  $\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ . Haciendo  $\delta \rightarrow 0$ , vemos que si  $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ , entonces  $\mathcal{H}^t(F) = 0$  para  $t > s$ . Por lo tanto, un gráfico de  $\mathcal{H}^s(F)$  contra  $s$  muestra que hay un valor crítico de  $s$  en el cual  $\mathcal{H}^s(F)$  ‘salta’ de  $\infty$  a 0. Dicho salto separa a las medidas para las cuales el conjunto  $F$  es ‘demasiado grande’ (a la izquierda de  $s_0$ ), todas tomando el valor  $\infty$ , de las medidas para las cuales  $F$  es ‘demasiado pequeño’ (a la derecha de  $s_0$ ), las cuales toman valor 0. Lo que sugiere que si hay alguna medida que pueda medir adecuadamente el tamaño de  $F$ , esa será  $\mathcal{H}^{s_0}$ . Llamaremos a este valor crítico la *dimensión Hausdorff* de  $F$ :

**Definición 2.15.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ . La *dimensión Hausdorff* de  $F$ , que notaremos  $\dim_H F$ , se define como

$$\dim_H F = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\},$$

tomando a 0 como supremos del conjunto vacío.

Si  $s = \dim_H F$ , entonces es posible que  $\mathcal{H}^s(F)$  sea cero, infinito o que

$$0 < \mathcal{H}^s < \infty.$$

Un conjunto Borel que satisface esta última condición se llama un  $s$ -set.

Veamos algunas de las propiedades de la *dimensión Hausdorff*.

**Proposición 2.16.**  $\dim_H F$  satisface las siguientes propiedades:

- Si  $E \subset F$  entonces  $\dim_H E \leq \dim_H F$ .
- Si  $F_1, F_2, \dots$  es una sucesión contable de conjuntos, entonces

$$\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H F_i\}$$

- Si  $F$  es un conjunto contable, entonces  $\dim_H F = 0$ .
- Si  $F \subset \mathbb{R}^n$  es abierto, entonces  $\dim_H F = n$ .

**Demostración:** Ver [Fal03]. ■

Utilizando las proposiciones 2.13 y 2.14, se puede probar lo siguiente:

**Proposición 2.17.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisface la condición Hölder

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \quad x, y \in F.$$

Entonces  $\dim_H f(F) \leq (1/\alpha)\dim_H F$ .

**Corolario 2.18.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ , entonces:

- a. Si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación Lipschitz, entonces  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F$ .

b. Si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una transformación bi-Lipschitz, entonces  $\dim_H f(F) = \dim_H F$ .

Este corolario nos dice que la dimensión de Hausdorff es un invariante por transformaciones bi-Lipschitz. Por lo tanto si dos conjuntos tienen diferentes dimensiones, entonces no puede existir entre ellos una función bi-Lipschitz. Puede entonces tomarse a la dimensión de Hausdorff como una herramienta para distinguir conjuntos que no son homeomorfos. En general, la dimensión de un conjunto nos dice muy poco sobre las propiedades topológicas del mismo. Sin embargo, un conjunto con dimensión menor a 1 es necesariamente totalmente desconexo, es decir que no tiene dos puntos que estén en la misma componente conexa.

**Proposición 2.19.** *Un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  con  $\dim_H F < 1$  es totalmente desconexo.*

**Demostración:** Sean  $x$  y  $y$  dos puntos distintos de  $F$ . Definamos la función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  como  $f(z) = |z - x|$ . Dado que  $f$  no aumenta distancias, pues

$$\left| |z - x| - |w - x| \right| \leq |(z - x) - (w - x)| = |z - w|,$$

tenemos del Corolario 2.18 que  $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$ . Entonces  $f(F)$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  de medida  $\mathcal{H}^1$  cero, y por lo tanto tiene complemento denso. Eligiendo  $r$  tal que  $r \notin f(F)$  y  $0 < r < f(y)$  tenemos que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

Entonces  $F$  está contenido en dos conjuntos abiertos disjuntos, con  $x$  en un conjunto e  $y$  en el otro, por lo que  $x$  e  $y$  están en diferentes componentes conexas de  $F$ . ■

### 2.3.3. Otras dimensiones de conjunto

Si bien la dimensión de Hausdorff es la definición principal, existen otras definiciones de dimensión que se utilizan en la literatura. Dichas definiciones siempre tienen en común la idea de *medida a escala*  $\delta$ , es decir, que para un  $\delta$  dado, se mide de manera que se ignora toda irregularidad de tamaño menor a  $\delta$ , y se analiza como se comporta la medida cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

No hay reglas definidas que se deban respetar para que una cantidad pueda ser considerada una dimensión, pues, en la mayoría de los casos, los factores que determinan que una definición de dimensión sea aceptada o no son reconocidos por la experiencia y la intuición. En general, lo que se busca es cierto comportamiento de escala, que la definición sea natural al contexto y que se verifiquen ciertas propiedades típicas de una dimensión.

**Definición 2.20.** De acuerdo con [Fal03], pretendemos que una dimensión de conjuntos  $\dim$  satisfaga, al menos, varias de las siguientes condiciones:

- (a) Monotonía: si  $E \subset F$ , entonces  $\dim(E) \leq \dim(F)$ .
- (b) Invariancia geométrica: sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una simetría, una traslación o dilatación. Entonces  $\dim(E) = \dim(g(E))$ .

- (c) Invariancia por deformaciones Lipschitz: sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una transformación bi-Lipschitz. Entonces  $\dim(E) = \dim(g(E))$ .
- (d) Acotación:  $\dim(E) \leq 1$ .
- (e) Conjuntos abiertos: si  $U \subset E$  es un conjunto abierto, entonces  $\dim(E) = 1$ .
- (f) Discretitud: si  $E$  es contable,  $\dim(E) = 0$ .
- (g)  $\sigma$ -estabilidad:  $\dim(\bigcup_{i \geq 1} E_i) = \sup_{i \geq 1} \{\dim(E_i)\}$ .

Debemos recalcar que definiciones de dimensión que parecen similares, pueden tener propiedades muy diferentes. Tampoco debe asumirse que diferentes definiciones otorguen el mismo valor de dimensión. En particular, las propiedades de la dimensión Hausdorff no necesariamente valen para otras definiciones.

### 2.3.4. Dimensión Box y Packing

La dimensión Box es una de las más utilizadas debido a la relativa facilidad que tiene para ser calculada o estimada.

**Definición 2.21.** Sea  $F$  un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , no vacío y acotado, y sea  $M_\delta$  el menor número de conjuntos de diámetro  $\delta$  que pueden cubrir a  $F$ . Las dimensiones box inferior y superior de  $F$  respectivamente son

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.3.6)$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (2.3.7)$$

Si estos valores coinciden, vamos a referirnos a dicho valor como la *dimensión box* de  $F$

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}. \quad (2.3.8)$$

Para evitar problemas como  $\log 0$  o  $\log \infty$ , se considera la dimensión box de conjuntos que son no vacíos y acotados. Además, se asume que  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño como para asegurar que  $-\log \delta$  sea estrictamente positivo.

Falconer en [Fal03], muestra la siguiente equivalencia:

**Proposición 2.22.** La dimensión box inferior y superior de un subconjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  están dadas por

$$\underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.3.9)$$

$$\overline{\dim}_B F = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta} \quad (2.3.10)$$

y la dimensión box de  $F$  por

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta}, \quad (2.3.11)$$

(si este límite existe), donde  $M_\delta(F)$  es cualquiera de las siguientes:

- (i) el menor número de bolas cerradas de radio  $\delta$  que cubren  $F$ ;
- (ii) el menor número de cubos de lado  $\delta$  que cubren  $F$ ;
- (iii) el número de cubos de una  $\delta$ -malla que intersecan  $F$ ;
- (iv) el menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo  $\delta$  que cubren  $F$ ;
- (v) el mayor número de bolas disjuntas de radio  $\delta$  con centros en  $F$ .

La lista anterior puede ser incluso mas extensa, lo que se hace en la práctica es adoptar la definición que mas conviene para cada caso particular.

Vamos a destacar una definición particular equivalente de la dimensión box. Primero introduzcamos la siguiente definición:

**Definición 2.23.** Un  $\delta$ -entorno  $F_\delta$  de un conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$  es

$$F_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| \leq \delta, \text{ para algún } y \in F\}. \quad (2.3.12)$$

Lo que hacemos entonces es considerar cómo el volumen  $n$ -dimensional de  $F_\delta$  se encoge cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Si estamos en  $\mathbb{R}^3$  y  $F$  es un punto, entonces  $F_\delta$  es la bola tal que  $\text{vol}(F_\delta) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ ; si  $F$  es un segmento de longitud  $l$ , entonces  $F_\delta$  es un entorno tipo “salchicha” con  $\text{vol}(F_\delta) \sim \pi l\delta^2$ ; y si  $F$  es un conjunto plano de área  $a$ , entonces  $F_\delta$  es un engrosamiento de  $F$  con  $\text{vol}(F_\delta) \sim 2a\delta$ . Prestemos atención a que en cada caso,  $\text{vol}(F_\delta) \sim c\delta^{3-s}$  donde el entero  $s$  es la dimensión de  $F$ , por lo que el exponente que acompaña a  $\delta$  es un indicativo de dimensión. El coeficiente  $c$  de  $\delta^{3-s}$ , se conoce como el *contenido Minkowski* de  $F$ , y es una medida de la longitud, área o volumen del conjunto, según corresponda. Esta idea se puede extender a dimensiones fraccionarias. Si  $F \subset \mathbb{R}^n$  es tal que  $\text{vol}^n(F_\delta)/\delta^{n-s}$  tiende a límite positivo y finito cuando  $\delta \rightarrow 0$ , para algún  $s$  y donde  $\text{vol}^n$  es el volumen  $n$ -dimensional, entonces tiene sentido referirnos a  $F$  como  $s$ -dimensional. El valor límite se denomina el *contenido  $s$ -dimensional* de  $F$ , aunque no es una medida, pues no necesariamente es aditivo sobre subconjuntos disjuntos. La siguiente proposición relaciona el exponente crítico de  $\delta$  con la dimensión box:

**Proposición 2.24** (Proposición 3.2 en [Fal03]). Si  $F$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , entonces

$$\overline{\dim}_B F = n - \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta},$$

$$\underline{\dim}_B F = n - \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \text{vol}^n(F_\delta)}{\log \delta}$$

donde  $F_\delta$  es un  $\delta$ -entorno de  $F$ .

En este contexto, nos referimos a la dimensión box como *dimensión de Minkowski*.

Veamos ahora como es la relación que tiene la dimensión box con la dimensión de Hausdorff. Si  $F$  puede cubrirse con  $M_\delta(F)$  conjuntos de diámetro  $\delta$ , entonces por la definición 2.3.1 podemos escribir

$$\dim_H F \leq \underline{\dim}_B \leq \overline{\dim}_B,$$

para todo conjunto  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Aunque para muchos de los conjuntos que se utilizan en la práctica estas dimensiones coinciden, existen muchos ejemplos donde la desigualdad es estricta. La diferencia básicamente radica en que al calcular la dimensión Hausdorff, se asignan diferentes pesos  $|U_i|^s$  a los conjuntos del cubrimiento, mientras que para la dimensión box se le asigna el mismo peso  $\delta^s$ , por lo que en general resulta más fácil de calcular. Por lo tanto, la dimensión box puede tomarse como una medida de la eficiencia con la que un conjunto puede ser cubierto por pequeños conjuntos de igual tamaño, mientras que la dimensión Hausdorff involucra conjuntos pequeños, pero de tamaños muy variados. La dimensión box posee algunas propiedades indeseadas, que complican su manejo, consecuencia de que  $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta(F) \delta^s$  no es una medida sobre conjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , puede verse el libro de Falconer [Fal03] para más detalles.

Veamos, a modo de ejemplo, como calcular la dimensión box del conjunto ternario de Cantor, la cual coincide con su dimensión Hausdorff.

**Ejemplo 2.25.** Sea  $F$  el conjunto ternario de Cantor. Entonces  $\underline{\dim}_B F = \overline{\dim}_B F = \log 2 / \log 3$

Si cubrimos  $F$  con los  $2^k$  intervalos de nivel  $k$  de longitud  $3^{-k}$ , nos da que  $M_\delta(F) \leq 2^k$  si  $3^{-k} \leq \delta \leq 3^{-k+1}$ . Entonces de (2.3.7)

$$\overline{\dim}_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log M_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^{k-1}} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Por otro lado, cualquier intervalo de longitud  $3^{-k-1} \leq \delta \leq 3^{-k}$  interseca a lo sumo a uno de los intervalos de nivel  $k$  de longitud  $3^{-k}$  utilizados en la construcción de  $F$ . Hay  $2^k$  de tales intervalos, y entonces al menos  $2^k$  intervalos de longitud  $\delta$  se requieren para cubrir  $F$ . Por lo tanto  $M_\delta(F) \geq 2^k$ , lo que nos lleva a que  $\underline{\dim}_B F \geq \log 2 / \log 3$ .

### Dimensión Packing

Como vimos, la dimensión box puede definirse utilizando cubrimientos por bolas pequeñas de igual radio, y por otro lado  $\overline{\dim}_B$  puede pensarse como una dimensión que depende de rellenos por bolas disjuntas de igual radio que son lo más densas posible (definición equivalente (v)). La siguiente es una dimensión definida en términos de rellenos (packings) densos de bolas disjuntas de radios pequeños diferentes.

Para  $s \geq 0$  y  $\delta > 0$ , sea

$$\mathcal{P}_\delta^s(F) = \sup \left\{ \sum_i |B_i|^s : \{B_i\} \text{ es una colección de bolas} \right.$$

disjuntas de radio a lo sumo  $\delta$  con centros en  $F$  \left. \right\}.



$\mathcal{P}_\delta^s(F)$  decrece con  $\delta$ , por lo que existe el límite

$$\mathcal{P}_0^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\delta^s(F).$$

Si consideramos numerables conjuntos densos, se ve que  $\mathcal{P}_0^s(F)$  tampoco es una medida, al igual que ocurre con  $\lim_{\delta \rightarrow 0} M_\delta(F)\delta^s$  para la dimensión box. Por lo tanto, se modifica la definición de la siguiente manera

$$\mathcal{P}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^s(F_i) : F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right\}.$$

$\mathcal{P}^s(F)$  es una medida sobre  $\mathbb{R}^n$ , y se conoce como la *medida packing s-dimensional*. Se define entonces la *dimensión packing* de manera natural:

$$\dim_{\mathcal{P}} F = \sup \{s : \mathcal{P}^s(F) = \infty\} = \inf \{s : \mathcal{P}^s(F) = 0\}.$$

La estructura subyacente implica que la dimensión packing es monótona, y además si tenemos una colección contable de conjuntos  $\{F_i\}$ ,

$$\dim_{\mathcal{P}} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_i \dim_{\mathcal{P}} F_i,$$

ya que si  $s > \dim_{\mathcal{P}} F_i$  para todo  $i$ , entonces  $\mathcal{P}^s(\cup F_i) \leq \sum_i \mathcal{P}^s(F_i) = 0$ , lo que implica que  $(\cup_i F_i) \leq s$ .

En [Fal03] se establece la siguiente relación entre las dimensiones que venimos discutiendo:

$$\dim_H F \leq \dim_{\mathcal{P}} F \leq \overline{\dim}_B F.$$

Esta situación se ve mejorada para conjuntos compactos con dimensión local constante, lo que ocurre en particular en conjuntos con cierta autosimilaridad.

**Proposición 2.26.** *Sea  $F \subset \mathbb{R}^n$ , compacto y tal que*

$$\overline{\dim}_B(F \cap V) = \overline{\dim}_B F$$

*para todo conjunto abierto  $V$  que interseca a  $F$ . Entonces  $\dim_{\mathcal{P}} F = \overline{\dim}_B F$ .*

**Demostración:** Ver [Fal03] ■

**Observación 2.27.** Recordemos que la dimensión Hausdorff y packing satisfacen todas las propiedades 2.20, pero que la dimensión Minkowski o Box no satisface las condiciones de discretitud y  $\sigma$ -estabilidad.

### 2.3.5. Conjuntos Autosimilares

Introduzcamos algunas nociones sobre los conjuntos sobre los que vamos a analizar los problemas a lo largo de este trabajo.

Sea  $\{S_i\}_{i=1}^N$  un sistema iterado de funciones (IFS) de contracciones en  $\mathbb{R}$ , es decir, que para cada  $i$  existe  $r_i$ ,  $0 < r_i < 1$ , tal que

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq r_i|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

De los conocidos trabajos de Hutchinson (ver [Fal01, Ma]) sabemos que existe un único conjunto compacto no vacío  $K$  que satisface

$$K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K),$$

y se llama el atractor o conjunto invariante del IFS  $\{S_i\}_{i=1}^N$ .

Si consideramos el siguiente sistema iterado de funciones

$$S_1(x) = rx, \quad S_2(x) = rx + 1, \quad 0 < r < 1, \quad (2.3.13)$$

y  $p \in (0, 1)$ , entonces la medida auto-similar  $\mu_{r,p}$  asociada satisface

$$\mu_{r,p}(A) = p\mu_{r,p} \circ S_1^{-1}(A) + (1-p)\mu_{r,p} \circ S_2^{-1}(A) \quad (2.3.14)$$

para todo conjunto Borel  $A \subset \mathbb{R}$ . Estas medidas autosimilares se conocen como *convoluciones Bernoulli infinitas*; ver [PSS] para más detalles de su historia y propiedades.

### 2.3.6. Funciones medibles e integración

Sea  $E \subset \mathbb{R}^n$ , una función  $f : E \rightarrow [-\infty, \infty]$  se llama  $\mu$ -medible si para cada conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(U)$  es  $\mu$ -medible. En caso de que  $\mu$  es la medida Lebesgue, solo diremos que  $f$  es medible.

La siguiente proposición establece algunas propiedades de las funciones medibles, la prueba puede encontrarse en [EG].

**Proposición 2.28.** 1. Si  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  son  $\mu$ -medibles, entonces  $f + g$ ,  $fg$ ,  $|f|$ ,  $\min f, g$  y  $\max f, g$  son  $\mu$ -medibles. Si  $g \neq 0$  en  $E$ , entonces  $f/g$  también es  $\mu$ -medible.

2. Si las funciones  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , son  $\mu$ -medibles, entonces  $\inf f_n$ ,  $\sup f_n$ ,  $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$  y  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$  son  $\mu$ -medibles.

3. Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mu$ -medible, entonces existen conjuntos  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   $\mu$ -medibles en  $E$  tal que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{A_n}.$$

Dada  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , notaremos

$$f^+ = \max f, 0 \quad \text{y} \quad f^- = \min f, 0.$$

Observemos que  $f = f^+ - f^-$ .

Una función  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  se llama una *función simple* si la imagen de  $g$  es numerable.

Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mu$  una medida sobre  $\Omega$ . Para definir la integral de una función  $\mu$ -medible, empezaremos tomando una función  $g$ , simple,  $\mu$ -medible y no negativa en  $E$ . Definimos la integral de  $g$  sobre  $E$  como

$$\int_E g d\mu = \sum_{0 \leq y < \infty} y \mu(g^{-1}(y)).$$

Ahora, para  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu$ -medible definimos la integral de  $f$  como

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E g d\mu,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones simples  $\mu$ -medibles  $g$ , tal que  $0 \leq g \leq f$   $\mu$ -a.e.

Una función  $\mu$ -medible  $f$  se llama  $\mu$ -integrable si

$$\int_E |f| d\mu < \infty,$$

en cuyo caso escribiremos

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Enunciamos ahora algunos teoremas sobre límite que utilizaremos en el desarrollo de las pruebas de nuestros resultados. Puede verse [EG] para las pruebas.

**Lema 2.29** (Lema de Fatou). Sean  $f_n : E \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -medibles, para  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

**Teorema 2.30** (Convergencia Monótona). Sean  $f_n : E \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -medibles,  $n \in \mathbb{N}$ , con  $f_n \leq f_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu.$$

**Teorema 2.31** (Convergencia Dominada). Sea  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de funciones  $\mu$ -medibles, tal que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

existe  $\mu$ -a.e. Si existe una función  $g$   $\mu$ -integrable tal que  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -a.e. para todo  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $f$  es  $\mu$ -integrable y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0.$$

**Teorema 2.32.** Supongamos que  $f$  y  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son  $\mu$ -medibles y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0.$$

Entonces existe una subsucesión  $\{f_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f_{n_j}(x) = f(x), \quad \mu - a.e.$$

## 2.4. Funciones de variación acotada

**Definición 2.33.** Una función  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  se dice de variación acotada si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq C$$

para toda partición

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

de  $[a, b]$ , por los puntos de subdivisión  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

**Definición 2.34.** Sea  $f$  una función de variación acotada. Entonces la variación total de  $f$  en  $[a, b]$ ,  $V_a^b(f)$ , es

$$V_a^b(f) = \sup \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|,$$

donde el último supremo se toma sobre todas las particiones finitas del intervalo  $[a, b]$ .

**Observación 2.35.** Una función  $f$  definida en  $(-\infty, \infty)$  se dice de variación acotada si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$V_a^b(f) \leq C$$

para todo par de números reales  $a$  y  $b$  ( $a < b$ ). Entonces

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} V_a^b(f)$$

se llama la variación total de  $f$  en  $(-\infty, \infty)$ , y se escribe  $V_{-\infty}^{\infty}(f)$ .

Un estudio detallado de este tipo de funciones y sus propiedades puede verse en el libro de Kolmogorov y Fomin [KoFo].

## 2.5. Espacios $L^p$

Consideremos un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  una medida positiva en  $\Omega$  y  $p$  un número real positivo, notamos  $L^p(\Omega, \mu)$  la clase de todas las funciones  $\mu$ -medibles  $f$ , definidas en  $\Omega$  para las cuales

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty.$$

Cuando se trate de la medida Lebesgue, escribiremos  $L^p(\Omega)$  en lugar de  $L^p(\Omega, \mu)$ .

El funcional  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega, \mu)}$  definido como

$$\|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en  $L^p(\Omega, \mu)$ , con  $1 \leq p < \infty$ .

Vamos a llamar  $L^p_{loc}(\Omega, \mu)$  al espacio de todas las funciones  $\mu$ -medibles  $f$  definidas  $\mu$ -a.e. sobre  $\Omega$ , para las cuales  $f \in L^p(K, \mu)$  para todo conjunto compacto  $K \subset \Omega$ .

Diremos que una función  $f$ ,  $\mu$ -medible en  $\Omega$ , es *esencialmente acotada* en  $\Omega$  si existe una constante  $C$  tal que  $|f(x)| \leq C$   $\mu$ -a.e. en  $\Omega$ . La mayor cota inferior de dichas constante se llama el *supremo esencial* de  $|f|$  en  $\Omega$  y lo escribiremos  $\text{supess } |f(x)| : x \in \Omega$ .

Notaremos como  $L^\infty(\Omega, \mu)$  al espacio vectorial que consiste de todas las funciones  $f$  que son esencialmente acotadas en  $\Omega$ . El funcional

$$\|f\|_\infty = \text{supess } |f(x)| : x \in \Omega$$

es una norma en  $L^\infty(\Omega, \mu)$ .

Sea  $1 \leq p \leq \infty$  notaremos con  $p'$  al número

$$\begin{cases} -\infty & \text{si } p = 1, \\ \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < \infty, \\ 1 & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

tal que  $1 \leq p' \leq \infty$  y  $1/p + 1/p' = 1$ . Diremos que  $p'$  es el *exponente conjugado* de  $p$ .

Los siguientes teoremas pueden encontrarse en [Ru]

**Teorema 2.36** (Desigualdad de Hölder). Si  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f \in L^p(\Omega, \mu)$ ,  $g \in L^{p'}(\Omega, \mu)$  entonces  $fg \in L^1(\Omega, \mu)$  y

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p(\Omega, \mu)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega, \mu)}.$$

**Teorema 2.37.** Sea  $1 \leq p \leq \infty$ , entonces  $L^p(\Omega, \mu)$  es un espacio de Banach,  $L^p(\Omega, \mu)^* = L^{p'}(\Omega, \mu)$  para todo  $1 \leq p < \infty$ , y  $L^1(\Omega, \mu) \subset L^\infty(\Omega, \mu)^*$ .

**Corolario 2.38.** Si  $1 \leq p \leq \infty$ , una sucesión de Cauchy en  $L^p(\Omega, \mu)$  tiene una subsucesión puntualmente convergente en casi todo punto de  $\Omega$ .

**Corolario 2.39.**  $L^2(\Omega, \mu)$  es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg \, d\mu.$$

Los siguientes resultados pueden encontrarse en [Br].

**Teorema 2.40.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $L^1(\Omega, \mu)$  es un espacio de Banach separable y  $L^p(\Omega, \mu)$  es un espacio de Banach separable, reflexivo y uniformemente convexo para cada  $1 < p < \infty$ .

**Teorema 2.41.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces  $C_0^\infty(\Omega)$  es denso en  $L^p(\Omega)$  si  $1 \leq p < \infty$ .

## 2.6. El espacio de Sobolev

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  y  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Para un multi-índice  $\alpha$ ,  $\alpha \geq 1$ , la función  $v_\alpha$  se llama la *derivada débil* de  $u$  (de orden  $\alpha$ ) si se verifica que

$$\int_{\Omega} v_\alpha \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, dx,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty$ . Entonces, notaremos a  $v_\alpha$  como  $D^\alpha u$ .

Diremos que una función es *débilmente derivable* si todas sus derivadas débiles de primer orden existen. Notaremos al espacio lineal de funciones débilmente derivables como  $W^1(\Omega)$ . Notemos que  $C^1(\Omega)$  está incluido en  $W^1(\Omega)$ .

Las pruebas de los siguientes lemas pueden verse en [GT].

**Lema 2.42.** Sea  $u \in W^1(\Omega)$ . Entonces  $u^+$ ,  $u^-$  y  $|u| \in W^1(\Omega)$ .

**Lema 2.43.** Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , acotado, y sea  $u \in W^1(\Omega)$ . Entonces  $\nabla u = 0$  a.e. sobre cualquier conjunto donde  $u$  es constante.

Definimos entonces, para  $k \in \mathbb{N}$  y  $1 \leq p \leq \infty$ , el *espacio de Sobolev* como

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Si  $p = 2$ , usaremos  $H^k(\Omega)$  en lugar de  $W^{k,2}(\Omega)$ .

El espacio  $W^{k,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach, equipado con la norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como antes, llamaremos  $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$  al conjunto de todas las funciones  $u$  definidas en  $\Omega$ , para las cuales  $u \in W^{k,p}(K)$ , para todo compacto  $K \subset \Omega$ .

Además, el espacio  $W_0^{k,p}(\Omega)$  se define como la clausura de  $C_0^\infty(\Omega)$  en el espacio  $W^{k,p}(\Omega)$ .

**Teorema 2.44** (Ver [A]).  $W^{k,p}(\Omega)$  es separable si  $1 \leq p < \infty$ , y es reflexivo y uniformemente convexo si  $1 < p < \infty$ . En particular,  $H^k(\Omega)$  es un espacio de Hilbert separable con el producto interno

$$\langle u, v \rangle_k = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx.$$

**Teorema 2.45** (Ver [EG]). Supongamos que  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  para algún  $1 \leq p < \infty$ . Entonces existe una sucesión  $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  en  $W^{k,p}(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$  tal que

$$\phi_n \rightarrow u \quad \text{fuertemente en } W^{k,p}(\Omega).$$

**Teorema 2.46** (Rellich-Kondrachov, ver [Br]). Sea  $\Omega$  un dominio Lipschitz acotado. Entonces,

- si  $1 < p < N$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  está inmerso en  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [1, p^*)$  donde  $p^* = \frac{Np}{(N-p)}$ ,
- si  $p = N$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  está inmerso en  $L^q(\Omega)$  para todo  $q \in [1, \infty)$ ,
- si  $p > N$ ,  $W^{1,p}(\Omega)$  está inmerso en  $C(\bar{\Omega})$ .

Además, todas las inmersiones son compactas.

## 2.7. Teorema de Prokhorov y Teorema de Helly

Los siguientes resultados debidos a Prokhorov y Helly son cruciales en nuestras demostraciones. Aquí los presentamos solo para medidas de probabilidad en la recta, aunque valen para espacios métricos separables y también para medidas finitas signadas.

**Definición 2.47.** Una familia  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  de medidas de probabilidad Borel en  $\mathbb{R}$  se dice *concentrada* (*tight*) si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un conjunto compacto  $K_{\varepsilon}$  tal que

$$\mu_i(K_{\varepsilon}) \geq 1 - \varepsilon$$

para todo  $i \in I$ .

**Definición 2.48.** Una sucesión  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  de medidas de probabilidad Borel en  $\mathbb{R}$  converge débilmente a una medida  $\mu$  si

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu_n \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f d\mu$$

para todo  $f \in C_b(\mathbb{R})$ .

**Teorema 2.49** (Prokhorov). Una familia  $\{\mu_i\}_{i \in I}$  de medidas de probabilidad Borel en  $\mathbb{R}$  es concentrada si y solo si su clausura es débilmente compacta.

El teorema de Prokhorov se puede escribir en términos de las funciones de distribución

$$F_n(x) = \mu_n(-\infty, x],$$

y obtener un resultado mas fuerte:

**Teorema 2.50** (Teorema de Selección de Helly). *Sea  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones reales no decrecientes en  $\mathbb{R}$  que satisfacen  $0 \leq F_n(x) \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \geq 1$ . Entonces, existe una subsucesión  $\{F_{n_j}\}$  que converge puntualmente a una función real  $F$ . Si la función límite  $F$  es continua, entonces esta convergencia es uniforme sobre conjuntos compactos de  $\mathbb{R}$ .*

En particular, cuando  $F_n$  están asociadas a una sucesión concentrada de medidas que convergen débilmente a  $\mu$  y la función de distribución de  $\mu$  es continua, la convergencia es uniforme en  $\mathbb{R}$ . La clave es asegurarnos de que no habrá pérdida de masa en el infinito:

**Lema 2.51.** *Sea  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  una sucesión de funciones de distribución asociadas a una sucesión de medidas de probabilidad  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  concentrada, soportadas en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  converge puntualmente a una función continua  $F$  que es la función de distribución de alguna medida de probabilidad  $\mu$ . Entonces,  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  converge uniformemente a  $F$ .*

**Demostración:** Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  es concentrada, existen  $T > 0$  y  $n_0$  tal que

$$\mu_n([-T, T]) = F_n(T) - F_n(-T) > 1 - \varepsilon$$

para  $n > n_0$ . Entonces, tenemos que

$$F(T) - F(-T) \geq 1 - \varepsilon.$$

Sea  $\delta > 0$  tal que  $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$  siempre que  $x, y \in [-T, T]$  y  $|x - y| \leq \delta$ , y elegimos una familia de puntos  $-T = y_1 < y_2 < \dots < y_k = T$ , que satisface  $|y_j - y_{j+1}| = \delta$ . Así,

$$|F(y_j) - F_n(y_j)| < \varepsilon$$

para cualquier  $n \geq n_1$  debido a la convergencia puntual a  $F$ . Ahora, para  $x \in (y_j, y_{j+1})$ , y utilizando la monotonía de  $F_n$ ,

$$\begin{aligned} F(x) - F_n(x) &\leq F(x) - F_n(y_j) \\ &\leq |F(x) - F(y_j)| + |F(y_j) - F_n(y_j)| \\ &< 2\varepsilon. \\ F(x) - F_n(x) &\geq F(x) - F_n(y_{j+1}) \\ &= F(x) - F(y_{j+1}) + F(y_{j+1}) - F_n(y_{j+1}) \\ &> -2\varepsilon, \end{aligned}$$

y por esto  $|F(x) - F_n(x)| < 2\varepsilon$  para  $n \geq \max\{n_0, n_1\}$  y  $x \in [-T, T]$ .

Para  $x > T$ , como  $|F_n(T) - F(T)| < \varepsilon$ , tenemos  $F(T) > 1 - 2\varepsilon$ , y la monotonía de  $F$ , que es la función de distribución de alguna medida, implica que  $F(x) - F(T) < 2\varepsilon$ . Entonces,

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |F_n(x) - F_n(T)| + |F_n(T) - F(T)| + |F(T) - F(x)| < 4\varepsilon.$$

Una desigualdad similar vale para  $x < -T$ , y así queda probado el teorema. ■

Para mas detalles respecto a estos resultados, recomendamos ver [Pr] o el libro de Billingsley [Bi].



## 2.8. El Laplaciano $\Delta_\mu$ y sus autovalores

Vamos a repasar aquí la construcción de  $-\Delta_\mu$  y su dominio de definición, y enunciaremos, sin demostrarlos, algunos de los resultados que caracterizan su comportamiento. Nuestro enfoque sigue la construcción en [BNT, Fr04], y es algo diferente a la detallada en [Fr01], aunque es equivalente. Comenzamos considerando el espacio lineal de funciones

$$\mathcal{D} = \left\{ u : u(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \int_a^x f(y)d\mu(y) \text{ para } f \in L^2([a, b], d\mu), \right\},$$

y el espacio de tipo Sobolev  $\mathcal{D}_\mu^{1,2}$  es dicho conjunto dotado de la norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}_\mu^{1,2}}^2 = \int_a^b u'^2(x)dx + \int_a^b u^2(x)d\mu(x).$$

Dado que  $\mathcal{D}_\mu^{1,2} \subset C([a, b])$ , siendo  $\mu$  una medida sin átomos, tiene sentido restringir  $\mathcal{D}_\mu^{1,2}$  al conjunto de funciones que satisfacen una condición de borde Dirichlet, y definir

$$\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}([a, b]) = \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,2} : u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

El espacio  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}$  dotado de la norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_\mu^{1,2}}$  es un espacio de Hilbert, y es el dominio de la forma bilineal Dirichlet  $\mathcal{E}$ ,

$$\mathcal{E}(u, v) := \int_a^b u'(x)v'(x)dx,$$

es decir, las funciones  $u$  que tienen derivada distribucional  $u' \in L^2((a, b), dx)$ , ver [BNT]. Entonces, podemos pensar en  $-\Delta_\mu u$  como una distribución actuando sobre  $v \in C_0^\infty([a, b])$  como

$$\int_a^b (-\Delta_\mu u)v d\mu = \int_a^b u'(x)v'(x)dx.$$

De esta manera, podemos estudiar la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda u \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases} \quad (2.8.1)$$

variacionalmente, y diremos que una solución débil del problema es una función  $u \in \mathcal{D}_0^{1,2}$  que satisface

$$\int_a^b u'(x)v'(x)dx = \int w(y)u(y)v(y)d\mu(y)$$

para cualquier función test  $v \in C_c^\infty([a, b])$ .

**Observación 2.52.** Freiberg en [Fr01] introduce el espacio de funciones con  $\nu$ -derivada en  $L^2(K_\nu, \nu)$  para  $K_\nu \subset [a, b]$ ,

$$\mathcal{D}_1^\nu = \left\{ f : K_\nu \rightarrow \mathbb{R} : \exists f' \in L^2(K_\nu, \nu) : f(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)d\nu(y) \right\}$$

y  $\mathcal{D}_2^{\mu,\nu}$  como las funciones con una  $\mu$ -derivada en  $\mathcal{D}_1^\nu$ . Utilizando la regla del producto, la fórmula de integración por partes, y la unicidad de la representación con una derivada en  $L^2$  (resultados probados en [Fr01]), obtenemos para  $\nu = \mathcal{L}$  el mismo espacio  $\mathcal{D}^{1,2}$  de antes.

La fórmula de Gauss-Green probada en la Proposición 3.1 en [Fr01] implica que tanto el Laplaciano generalizado  $-\Delta_\mu$  Dirichlet como el Neumann son operadores simétricos positivos. Además, el correspondiente núcleo de Green y el operador resolvente fueron estudiados en [Fr01], y se tiene:

**Teorema 2.53** (Corolario 6.7 y 6.9 en [Fr01]). *Existe una sucesión creciente de autovalores positivos  $\{\lambda_k^\mu\}_{k \geq 1}$  (resp.,  $\{\gamma_k^\mu\}_{k \geq 1}$  con  $\gamma_1^\mu = 0$ ) del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda u \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases} \quad (2.8.2)$$

(resp.,  $u'(a) = 0 = u'(b)$ ), sin puntos de acumulación excepto  $+\infty$ . Las correspondientes autofunciones pertenecen a  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}$  (resp.,  $\mathcal{D}_\mu^{1,2}$ ).

Los autovalores pueden ser obtenidos a partir del teorema espectral para operadores compactos aplicado a  $(-\Delta_\mu)^{-1}$ , o utilizando la forma minimax Rayleigh-Ritz de Courant y Fischer. Este método es más conveniente para nuestros propósitos. El siguiente teorema vale también para los autovalores Neumann, considerando  $\mathcal{D}_\mu^{1,2}$  en lugar de  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}$ .

**Teorema 2.54.** *Sean  $\{\lambda_k^\mu\}_{k \geq 1}$  los autovalores Dirichlet del problema (2.8.2), y sea*

$$R(u) = \frac{\int_a^b u'^2(x) dx}{\int_a^b u^2(x) d\mu(x)}, \quad (2.8.3)$$

el cociente de Rayleigh. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda_1^\mu &= \min\{R(u) : u \in \mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}\} \\ \lambda_k^\mu &= \min\{R(u) : u \in \mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2} \cap \{u_1, \dots, u_{k-1}\}^\perp\}. \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\lambda_k^\mu = \inf_{L \in L_k} \sup_{u \in L \setminus \{0\}} R(u), \quad (2.8.4)$$

donde  $L_k$  es la familia de subespacios lineales  $k$ -dimensionales de  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}$ .

Una caracterización similar vale para los autovalores Neumann. Una consecuencia útil de la formulación alternativa (2.8.4) es que  $\gamma_k^\mu \leq \lambda_k^\mu$ , debido a la inclusión  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2} \subset \mathcal{D}_\mu^{1,2}$ .

Ahora repasemos algunos resultados sobre ceros y extremos de autofunciones. El siguiente lema es una consecuencia de la definición de  $\mathcal{D}_\mu^{1,2}$ :

**Lema 2.55.** *Sea  $u \in \mathcal{D}_\mu^{1,2}$ . Entonces  $u' \in L^2((a,b), dx)$ , y*

$$u(x) = u(c) + \int_c^x u'(y) dy$$

para cualquier  $c, x \in (a,b)$ . Además, si  $J \subset K_\mu^c \cap [a,b]$ , entonces  $u|_J$  es una función lineal.

En particular, implica la desigualdad de Poincaré,

$$\int_a^b u^2 d\mu \leq C \int_a^b u'^2 dx.$$

Como consecuencia del Lema 2.55, una solución de  $-\Delta_\mu u = wu$  puede ser constante en parte de  $[a, b]$ . Sin embargo, los máximos y mínimos de soluciones son siempre alcanzados en  $K_\mu$ : si el máximo o mínimo es alcanzado en algún  $c \in K_\mu^c$ ,  $u$  es constante en la componente conexa de  $K_\mu^c$  que contiene a  $c$ . Como usaremos este resultado, lo enunciamos en el siguiente lema:

**Lema 2.56.** *Sea  $u$  una solución de  $-\Delta_\mu u = wu$ . Entonces  $|u|$  alcanza su máximo en algún punto  $c \in K_\mu$ .*

Finalmente, los siguientes resultados describen precisamente el número de ceros de las autofunciones.

**Teorema 2.57** (Proposición 2.5 en [FL]). *Sea  $u_n$  una autofunción asociada al  $n$ -ésimo autovalor del problema (2.8.2). Entonces  $u_n$  tiene  $n + 1$  ceros simples en  $[a, b]$ .*

Un resultado similar vale para autovalores del problema con condición de borde Neumann:

**Teorema 2.58.** *Sea  $v_n$  una autofunción asociada al  $n$ -ésimo autovalor del problema (2.8.2) con condiciones de borde  $u'(a) = 0 = u'(b)$ . Entonces  $v_n$  tiene  $n - 1$  ceros simples en  $[a, b]$ .*

Los siguientes resultado aseguran la existencia y unicidad de solución para el problema, y las propiedades de oscilación de las autofunciones.

**Teorema 2.59.** [Prop. 2.1. en [BNT]] *Sea  $\mu$  una medida Borel positiva, acotada y continua sobre  $[0, 1]$  tal que  $\text{sop}(\mu) \subseteq [0, 1]$ . Entonces vale lo siguiente:*

(a) *El problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda u \\ u(y) = \alpha \\ u'(y) = \beta, \end{cases} \quad (2.8.5)$$

*tiene una única solución. En particular, si  $u(y) = u'(y) = 0$  entonces  $u(x) \equiv 0$ .*

(b)  *$-\Delta_\mu u = \lambda u$  si y solo si  $-u'' = \lambda \mu u$  en el sentido de las distribuciones.*

(c)  *$u$  es continuamente diferenciable,  $u'$  es diferenciable c.t.p. en  $[0, 1]$ .*

(d)  *$u$  y  $u'$  tienen solo ceros aislados (salvo que  $u$  sea constante).*

**Proposición 2.60** (Comparación de soluciones). [Prop. 2.3. en [BNT]]

*Sea  $-u_i'' = \lambda_i u_i$ ,  $u_i \not\equiv 0$ ,  $i = 1, 2$  y supongamos que  $a_2 \leq a_1$ ,  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ ,*

$$b_i = \min \{1, \{s > a_i : u_i(s) = 0\}\}$$

$$c_i = \min \{1, \{s > a_i : u_i'(s) = 0\}\}.$$

*Entonces*

- (a) Si  $u_1(a_1) = u_2(a_2) = 0$ , entonces  $c_2 \leq c_1$ .
- (b) Si  $u'_1(a_1) = u'_2(a_2) = 0$ , entonces  $b_2 \leq b_1$ .
- (c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ,  $a_1 = a_2 = 0$ ,  $u_1(0) = 0$ ,  $u'_1(0) \neq 0$ ,  $u'_2(0) = 0$ ,  $u_2(0) \neq 0$ , entonces  $b_2 \leq b_1$ ,  $c_2 \geq c_1$ .

**Observación 2.61.** En caso de que el soporte de la medida  $\mu$  sea mas pequeño que  $[0, 1]$ , tenemos el problema de que  $u$  es lineal en los intervalos que no intersecan al soporte de  $\mu$ . La unicidad implica que  $u$  no puede tener un intervalo donde se anule, sin embargo  $u'$  si puede, y en los resultados debe entonces considerarse dicho intervalo como un solo cero.

## 2.9. Comportamiento asintótico de los autovalores

El problema de autovalores para  $-\Delta_\mu$  fue ampliamente analizado por Bird, Cheng, Deng, Ngai, y Teplayev, entre otros (ver [ChNg, DeNg, BNT]). Algunos de dichos trabajos incluyen fractales como el clásico conjunto ternario de Cantor, y en los trabajos de Kigami [Ki01, Ki02] pueden verse incluso conjuntos mas complejos que presentan solapamientos.

En caso de medidas generales en un intervalo acotado, en Bird, Ngai y Teplayev [BNT] muestran en la siguiente proposición cómo es el orden de crecimiento asintótico de los autovalores, utilizando el *Renewal Theorem* (ver [KL]). En el **Capítulo 4**, daremos una demostración sin la necesidad de utilizar dicho teorema.

El exponente depende de la *dimensión espectral*  $d_s$ , que Kigami [Ki01] establece que está dada por la única solución de

$$(pr)^{d_s/2} + ((1-p)(1-r))^{d_s/2} = 1.$$

Primero, definimos la función  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ , que cuenta los autovalores, como

$$N(x) = \#\{\lambda : \lambda \text{ es un autovalor y } \lambda \leq x\},$$

y recordemos que si tenemos dos funciones reales  $f$  y  $g$ , notaremos  $f(x) \sim g(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  si existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  tal que

$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x),$$

para  $x$  suficientemente grande. Entonces tenemos el siguiente resultado:

**Proposición 2.62.** Sea  $0 < p < 1$  fijo y sea  $\mu = \mu_{r,p}$  una medida autosimilar definida por (2.3.14), sea  $d_s$  la dimensión espectral de  $\mu$ , y sea  $\lambda_n$  el  $n$ -ésimo autovalor Dirichlet o Neumann. Entonces

$$\lambda_n \sim n^{2/d_s}.$$

Equivalentemente,  $N(\lambda) \sim \lambda^{d_s/2}$ .

# 3

---

## Problema inverso nodal

En este capítulo presentamos el problema inverso de encontrar la función peso del problema

$$-u'' = \lambda\rho(x)u, \quad x \in (0, 1), \quad (3.0.1)$$

con condiciones de borde homogéneas

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)u(0) - \sin(\alpha)u'(0) &= 0 \\ \cos(\beta)u(1) - \sin(\beta)u'(1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.0.2)$$

donde  $0 \leq \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta \leq \pi$ ,  $\lambda$  es un parámetro real.

Primero, presentamos la notación y algunos resultados previos que son necesarios para el estudio de este problema en un intervalo acotado. Caracterizamos la función peso, construimos un algoritmo para obtenerla a partir de los ceros de una subsucesión de autofunciones, y demostramos que basta con conocer un conjunto denso de pares de nodos consecutivos para determinar  $\rho$  unívocamente. Probamos que se pueden determinar a posteriori los coeficientes  $\alpha, \beta$  involucrados en las condiciones de borde, y finalmente extendemos a pesos indefinidos los resultados de unicidad obtenidos en [HM $\epsilon$ 2].

En la segunda parte tratamos el problema inverso nodal en la semi-recta. Continuando con las ideas que nos permiten resolver el problema en un intervalo acotado, pudimos definir una familia de medidas de probabilidad, esparcidas uniformemente en los ceros de la  $n$ -ésima autofunción, y que tienen un límite débil que está caracterizado a partir de la función peso.

### 3.1. Notación

Sea  $\rho$  tal que  $\sqrt{|\rho|} \in BV[0, 1]$ , la parte positiva y negativa de  $\rho$  son

$$\rho^+(x) = \text{máx}\{\rho(x), 0\},$$

$$\rho^-(x) = \text{máx}\{-\rho(x), 0\}.$$

Notaremos

$$\begin{aligned}\Omega^+ &= \{x \in (0, 1) : \rho(x) > 0\} = \text{supp}(\rho^+), \\ \Omega^- &= \{x \in (0, 1) : \rho(x) < 0\} = \text{supp}(\rho^-), \\ \Omega^0 &= \{x \in (0, 1) : \rho(x) \equiv 0\}.\end{aligned}$$

Cuando consideremos pesos indefinidos, asumiremos que  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$  son conjuntos abiertos con medida positiva.

Llamamos  $\delta_{x_0}$  a la Delta de Dirac en  $x_0$ , es decir, la medida que satisface

$$\delta_{x_0}(a, b) = \begin{cases} 1 & x_0 \in (a, b) \\ 0 & x_0 \notin (a, b). \end{cases}$$

Entendemos por dominio nodal de una autofunción al conjunto conexo en  $[0, 1]$  entre dos ceros consecutivos, o entre un punto de borde y el cero mas cercano.

### 3.2. Autovalores y ceros de autofunciones

A continuación recordamos algunos resultados previos sobre el problema de autovalores que necesitaremos en las pruebas.

El problema de autovalores

$$-u'' = \lambda\rho(x)u, \quad x \in (0, 1) \tag{3.2.1}$$

con pesos positivos tiene una sucesión de autovalores no negativos,

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots \nearrow +\infty,$$

simples, por lo que si elegimos  $u_n$ , cualquier otra autofunción correspondiente a  $\lambda_n$  es un múltiplo de  $u_n$ . La autofunción  $u_n$  tiene  $n$  dominios nodales, aunque el número de soluciones depende de las condiciones de borde. Los siguientes son dos casos particulares:

- Condición de borde Dirichlet,  $u(0) = 0 = u(1)$ : la  $n$ -ésima autofunción tiene  $n + 1$  ceros, contanto a 0 y 1. En este caso, el primer autovalor es positivo.
- Condición de borde Neumann,  $u'(0) = 0 = u'(1)$ : la  $n$ -ésima autofunción tiene  $n - 1$  ceros. Ahora, el primer autovalor es cero y la autofunción asociada es constante.

Para condiciones de borde homogéneas generales, la  $n$ -ésima autofunción tiene  $n - 1$  o  $n$  ceros. Notemos que 0 es autovalor solo para el problema con condiciones de borde tipo Neumann.

Necesitaremos la siguiente estimación cuantitativa sobre el número de ceros de soluciones, donde  $\lfloor x \rfloor$  denota el mayor entero no mayor a  $x$ :

**Lema 3.1.** Sean  $r, R \in \mathbb{R}$  tal que  $r \leq \rho(x) \leq R$  para  $x \in [a, b]$ . Dado  $\lambda > 0$  y una solución  $u$  de

$$-u'' = \lambda \rho u,$$

entonces  $u$  tiene al menos  $\lfloor \sqrt{\lambda r}(b-a)/\pi \rfloor$  ceros, y a lo sumo  $\lfloor \sqrt{\lambda R}(b-a)/\pi \rfloor + 1$  ceros en  $[a, b]$ .

**Demostración:** La prueba es consecuencia del clásico teorema de Sturm, y sale directamente de comparar el número de ceros de  $v = \sin(\sqrt{\lambda r}(x-a))$  y  $w = \sin(\sqrt{\lambda R}(x-a))$ , dos soluciones de

$$-v'' = \lambda r v, \quad -w'' = \lambda R w$$

en  $[a, b]$ . ■

Los autovalores pueden obtenerse utilizando el cociente de Rayleigh y una de las variantes del método minimax de Courant-Fischer en algún subespacio  $H \subset H^1(0, 1)$  donde las condiciones son impuestas en caso de ser necesario.

Alternativamente, podemos obtener la sucesión de autovalores usando el método de *shooting*, basado en la transformada de Prüfer, la cual representa la solución del problema (3.0.1)-(3.0.2) en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} u(x) &= r(x) \sin(\theta(x)), \\ u'(x) &= r(x) \cos(\theta(x)), \end{aligned}$$

donde  $\theta$  y  $r$  son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \theta' = \cos^2(\theta) + \lambda \rho \sin^2(\theta), \\ r' = r(1 - \lambda \rho) \sin(\theta) \cos(\theta) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

con  $\theta(0) = \alpha \bmod(\pi)$ , y  $\theta(1) = \beta \bmod(\pi)$ .

Ahora, los autovalores pueden encontrarse resolviendo para  $\lambda$  y cada  $n \in \mathbb{N}$ , el problema

$$\theta' = \cos^2(\theta) + \lambda \rho \sin^2(\theta),$$

con  $\theta(0) = \alpha$  y  $\theta(1) = \beta + (n-1)\pi$ .

### 3.3. Problema de autovalores

El problema de autovalores para el Laplaciano en intervalos acotados ha sido ampliamente estudiado en los últimos años. Vamos a establecer algunos resultados sin demostración, puede verse el libro de [DR] para detalles de los mismos.

**Teorema 3.2.** [Teorema de comparación y oscilación de Sturm] Sean  $\sigma(x) \leq \rho(x)$  dos funciones continuas positivas, y sean  $u, v$  soluciones de los siguientes problemas:

$$\begin{aligned} (|u'|^{p-2}u')' &= \sigma(x)|u|^{p-2}u, \\ (|v'|^{p-2}v')' &= \rho(x)|v|^{p-2}v. \end{aligned}$$

Entonces, entre dos ceros de una solución  $u$ , cualquier solución  $v$  tiene al menos un cero. Mas aún, dadas dos soluciones  $u_1, u_2$  de la primera ecuación, sus ceros alternan.

También, los autovalores del siguiente problema en  $[a, b]$

$$\begin{aligned} (|u'|^{p-2}u')' &= \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u, & u(a) &= u(b) = 0 \\ (|v'|^{p-2}v')' &= \mu\rho(x)|v|^{p-2}v, & v(a) &= v(b) = 0 \end{aligned}$$

satisfacen  $\mu_k(\rho) \leq \lambda_k(\sigma)$  para cualquier  $k \geq 1$ , con desigualdades estrictas si  $\sigma \neq \rho$ .

**Teorema 3.3.** Sean  $a < b < c$ , y  $\rho$  una función continua positiva. Entonces los autovalores de los siguientes problemas

$$\begin{aligned} (|u'|^{p-2}u')' &= \lambda\rho(x)|u|^{p-2}u, & u(a) &= u(b) = 0 \\ (|v'|^{p-2}v')' &= \mu\rho(x)|v|^{p-2}v, & v(a) &= v(c) = 0 \end{aligned}$$

satisfacen  $\mu_k \leq \lambda_k$  para cualquier  $k \geq 1$ .

Cuando  $\rho$  es una constante, los autovalores y autofunciones pueden ser computadas explícitamente en términos de las funciones trigonométricas generalizadas. Llamemos  $\sin_p(x)$  a la solución del problema de valores iniciales

$$-(|u'|^{p-2}u')' = (p-1)|u|^{p-2}u, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1,$$

y sea  $\hat{\pi}_p$  el primer cero de  $\sin_p(x)$ , dado por

$$\hat{\pi}_p = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[p]{1-t^p}}.$$

Notemos que hay definiciones alternativas de  $\sin_p$  y  $\pi_p$ , dependiendo de la presencia o ausencia del factor  $p-1$  en la ecuación. Es conveniente introducir

$$\pi_p = \sqrt[p]{p-1} \hat{\pi}_p,$$

y ahora tenemos la siguiente caracterización del espectro:

**Teorema 3.4.** Los autovalores  $\lambda_n$  y autofunciones  $u_n$  de

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda|u|^{p-2}u, \quad u(a) = u(b) = 0,$$

están dados por

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi_p n}{b-a} \right)^p, \quad u_n(x) = \sin_p \left( \frac{\hat{\pi}_p n x}{b-a} \right).$$

Además, el  $n$ -ésimo autovalor es simple, y la autofunción asociada  $u_n$  tiene  $n$  dominios nodales, esto es,  $u_n$  tiene  $n+1$  ceros simples en  $[a, b]$ .



Ver, por ejemplo, Del Pino, Drabek y Manasevich [DdPM] para detalles sobre estos resultados. Existen fórmulas similares para los autovalores  $\{\nu_n\}_{n \geq 0}$  correspondientes a las condiciones de borde Neumann  $u'(a) = u'(b) = 0$ , y autovalores  $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$  correspondientes a condiciones de borde mixtas  $u(a) = u'(b) = 0$  o  $u'(a) = u(b) = 0$ , es decir,

$$\nu_n = \left( \frac{\pi_p(n-1)}{b-a} \right)^p, \quad \eta_n = \left( \frac{\pi_p n}{2(b-a)} \right)^p.$$

Por otro lado, no hay expresiones explícitas para problemas con peso, y hay varias cotas disponibles, ver [Pi01]. Veamos ahora la siguiente cota que, en el caso lineal  $p = 2$ , se debe a Nehari, Calogero y Cohn:

**Teorema 3.5.** [Teorema 1.1 en [CP]] Sea  $\sigma \in L^1([a, b])$  una función monótona no negativa, y sea  $\lambda_1$  el primer autovalor de

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\sigma(x)|u|^{p-2}u \quad u(a) = u(b) = 0. \quad (3.3.1)$$

Entonces

$$\frac{\pi_p}{2} \leq \lambda_1^{1/p} \int_a^b \sigma^{1/p}(x) dx. \quad (3.3.2)$$

Finalmente, cuando  $n$  va a infinito, el comportamiento asintótico de los autovalores del problema (3.3.1), sin la condición de monotonía, está dado por

$$\lambda_n = \frac{\pi_p^p n^p}{\left( \int_a^b \sigma^{1/p}(x) dx \right)^p} + o(n^p),$$

ver por ejemplo [FBP], incluso con una prueba para condiciones menos regulares sobre los pesos que las consideradas aquí.

## 3.4. Problema nodal inverso en un intervalo

### 3.4.1. Número de ceros

El siguiente es uno de los resultados principales de este capítulo:

**Teorema 3.6.** Sea  $\rho$  una función no negativa tal que  $\sqrt{\rho} \in BV[0, 1]$ . Sean  $\{x_0^n, \dots, x_n^n\}_{n \geq 1}$  los ceros de la  $n$ -ésima autofunción del problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda\rho(x)u, & x \in [0, 1] \\ \cos(\alpha)u(0) - \sin(\alpha)u'(0) = 0 \\ \cos(\beta)u(1) - \sin(\beta)u'(1) = 0 \end{cases} \quad (3.4.1)$$

donde  $x_0^n = 0$  y  $x_n^n = 1$ , son ceros o no. Sea  $Z_n$  la función

$$Z_n(x) = \frac{\#\{j \geq 0: x_j^n \leq x\}}{n+1}.$$

Entonces, existe  $Z(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(x)$  y

$$Z(x) = \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{\rho} dt} \int_0^x \sqrt{\rho(t)} dt. \quad (3.4.2)$$

### Demostración:

La existencia de un límite  $Z$  sigue directamente del teorema de Helly 2.50, definiendo la familia de medidas de probabilidad

$$dZ_n = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \delta_{x_j^n}.$$

Esta familia de medidas de probabilidad  $\{dZ_n\}_{n \geq 1}$  es concentrada, con soporte en  $[0, 1]$ , y el teorema de Prokhorov 2.49 implica que existe una medida  $dZ$  tal que alguna sucesión  $\{dZ_{n_k}\}_{k \geq 1}$  converge débilmente a  $dZ$ .

Ahora probemos que  $dZ = \sqrt{\rho} dx$ . De hecho, mostraremos que el límite no depende de una sucesión convergente particular  $\{dZ_{n_k}\}_{k \geq 1}$ , con lo cual toda la sucesión convergerá débilmente a  $dZ$ .

Asumamos primero que  $\rho$  es una función continua. Fijando  $\varepsilon > 0$ , y tomando  $M$  suficientemente grande, podemos subdividir el intervalo  $[0, 1]$  en  $M$  subintervalos de longitud  $h = M^{-1}$ , tal que

$$h \cdot \text{máx } \sqrt{\rho} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$0 \leq \sqrt{R_i} - \sqrt{r_i} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para  $1 \leq i \leq M$ , donde

$$r_i = \inf\{\rho(x) : x \in [(i-1)h, ih)\},$$

$$R_i = \sup\{\rho(x) : x \in [(i-1)h, ih)\}.$$

Llamemos  $y_{n,i}$  al número de ceros de  $u_n$  en el intervalo  $[(i-1)h, ih)$  para  $1 \leq i < M$ , y sea  $y_{n,M}$  el número de ceros de  $u_n$  en el intervalo  $[1-h, 1]$ . Tenemos,  $\sum_i y_{n,i} = n+1$ .

Si ahora fijamos  $x \in (0, 1)$ , estimemos  $Z_n(x)$  para  $n$  suficientemente grande. Existe algún  $I_0$  tal que  $x \in [(I_0-1)h, I_0h)$ , entonces

$$\sum_{i=1}^{I_0-1} y_{n,i} \leq (n+1)Z_n(x) \leq \sum_{i=1}^{I_0} y_{n,i}.$$

Por el lema 3.1 podemos acotar cada  $y_{n,i}$ ,

$$\sum_{i=1}^{I_0-1} \frac{\sqrt{\lambda_n r_i} h}{\pi} - 1 \leq (n+1)Z_n(x) \leq \sum_{i=1}^{I_0} \frac{\sqrt{\lambda_n R_i} h}{\pi} + 1,$$

y obtenemos

$$-M + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} \sum_{i=1}^{I_0-1} \sqrt{r_i} h \leq (n+1)Z_n(x) \leq M + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi} \sum_{j=1}^{I_0} \sqrt{R_j} h.$$

Observemos que

$$\sum_{i=1}^{I_0-1} \sqrt{r_i} h \leq \int_0^x \sqrt{\rho(t)} dt \leq \sum_{l=1}^{I_0} \sqrt{R_l} h,$$

y la hipótesis en  $h$  implica

$$\sum_{l=1}^{I_0} \sqrt{R_l} h - \sum_{i=1}^{I_0-1} \sqrt{r_i} h \leq h \cdot \max \rho + \sum_{i=1}^{I_0-1} (\sqrt{R_i} - \sqrt{r_i}) h < \varepsilon.$$

Finalmente, usamos la fórmula asintótica para los autovalores dada por la ecuación (1.0.2), y tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{M}{n+1} + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\pi(n+1)} = \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{\rho} dx},$$

lo que implica el resultado que buscábamos,

$$Z_n(x) \rightarrow \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{\rho} dx} \int_0^x \sqrt{\rho} dx.$$

Ahora consideremos  $\sqrt{\rho} \in BV[0, 1]$  arbitraria. Nuevamente fijemos  $\varepsilon > 0$ , y existen a lo sumo finitos puntos de discontinuidad  $z_1, \dots, z_{k(\varepsilon)}$  tales que

$$\left| \sqrt{\rho(z_i^+)} - \sqrt{\rho(z_i^-)} \right| > \varepsilon.$$

Podemos separar  $[0, 1]$  como

$$[0, 1] = [0, z_1] \cup \bigcup_{s=2}^{k(\varepsilon)} [z_{s-1}, z_s] \cup [z_{k(\varepsilon)}, 1].$$

Subdividiendo cada intervalo en  $M$  intervalos  $\{I_i\}_{i=1}^M$  tal que

$$\sup\{\sqrt{\rho(x)} : x \in I_i\} - \inf\{\sqrt{\rho(x)} : x \in I_i\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

para  $1 \leq i \leq M$ , y reduciendo su longitud de ser necesario, tal que

$$|I_i| \cdot \max \rho < \frac{\varepsilon}{2},$$

podemos repetir los argumentos previos, y el resultado queda probado. ■

Este teorema implica que la función peso  $\rho$  puede obtenerse a partir de los ceros de las autofunciones:

**Corolario 3.7.** Sea  $\rho$  una función no negativa tal que  $\sqrt{\rho} \in BV[0, 1]$  y  $\int_0^1 \sqrt{\rho} dt = 1$ . Dados los ceros de cualquier sucesión de autofunciones del problema (3.4.1), podemos recuperar el peso  $\rho$ .

**Demostración:** Notemos que, dado que  $\sqrt{\rho} \in BV[0, 1]$ , tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x-\varepsilon}^x \sqrt{\rho(y)} dy = \sqrt{\rho(x)}$$

en casi todo punto. ■

### 3.4.2. Un algoritmo para $\rho$

En la demostración anterior hemos construido una sucesión de medidas  $dZ_n$  a partir de la familia  $\{\delta_{x_j^n}\}_{0 \leq j \leq n}$ . Sin embargo, como  $\int_0^x dZ_n$  es una función simple, su derivada es solo la suma de deltas original, lo que no es una forma conveniente de aproximar  $\sqrt{\rho}$ .

Ahora, podemos introducir  $f_n$  definida de la siguiente manera:

$$f_n(x) = \frac{1}{n(x_j^n - x_{j-1}^n)} \quad x_{j-1}^n \leq x < x_j^n,$$

y entonces tenemos una nueva sucesión de medidas  $\mu_n = f_n(x)dx$ .

Notaremos  $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$ . Claramente,

$$\int_0^x dZ_n - \frac{1}{n} \leq \int_0^x d\mu_n \leq \int_0^x dZ_n,$$

y entonces convergen a  $\int_0^x \sqrt{\rho} dt$ .

La sucesión  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  converge en  $L^1$  a alguna  $f \in L^1$ . Entonces una subsucesión converge a  $f$  en casi todo punto y, del Teorema 3.6, toda la sucesión converge cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Como  $F_n(x) \rightarrow \int_0^x f(t)dt$ , tenemos que

$$f(x) = \sqrt{\rho(x)},$$

y  $f_n \rightarrow \sqrt{\rho}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , en casi todo punto.

Obtenemos entonces la siguiente aproximación a trozos de  $\rho$ :

$$\rho^n(x) = \frac{1}{n^2(x_j^n - x_{j-1}^n)^2} \quad x_{j-1}^n \leq x < x_j^n. \quad (3.4.3)$$

Observemos que este algoritmo requiere solo un subconjunto denso de pares de nodos que converjan a  $x$ . Esta aproximación puede compararse con el Algoritmo A en [HMc2],

$$\rho^n(x) = \frac{\pi^2}{\lambda_n^2(x_j^n - x_{j-1}^n)^2} \quad x_{j-1}^n \leq x < x_j^n,$$

donde  $\lambda_n^2$  es el  $n$ -ésimo autovalor, que debe ser conocido previamente. La convergencia del algoritmo a la función peso  $\rho$  será probada mas adelante, aunque puede deducirse del algoritmo anterior y el comportamiento asintótico de los autovalores, dado por la ecuación (1.0.2), ya que  $\int_0^1 \sqrt{\rho} = 1$ .

A diferencia del enfoque anterior, Shen and Tsai en [ST] (Teorema 2.1) dan la siguiente aproximación para  $\rho$ ,

$$\rho^n(x) = \frac{\pi^2}{\lambda_n^2} \left[ \left( \frac{x_{j+1}^n - x_j^n}{x_j^n - x_{j-1}^n} - 1 \right) (x - x_{j-1}^n) + (x_j^n - x_{j-1}^n) \right]^{-2}, \quad (3.4.4)$$

para  $x \in [x_{j-1}^n, x_j^n]$  bajo el supuesto de que  $\lambda_n$  se conoce, y  $\rho \in C^2([0, 1])$ . Una fórmula similar se puede obtener reemplazando  $\pi^2/\lambda_n^2$  por  $n^2$ .

### 3.4.3. Condiciones de borde

A continuación, mediante un argumento de shooting vamos a recobrar los parámetros en las condiciones de borde del problema.

**Teorema 3.8.** *Sea  $\rho$  una función no negativa,  $\sqrt{\rho} \in BV[0, 1]$  y  $\int_0^1 \sqrt{\rho} dt = 1$ . Dados los ceros de una autofunción que tiene al menos dos ceros interiores, podemos recuperar los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  en las condiciones de borde.*

**Demostración:** Dados los ceros de  $u_n$  y  $\rho$ , podemos computar con arbitraria precisión el primer autovalor de

$$-u'' = \mu_1 \rho u, \quad u(x_j^n) = u(x_{j+1}^n) = 0$$

donde  $x_j^n$  y  $x_{j+1}^n$  son dos ceros consecutivos de  $u_n$ .

Dado que  $\mu_1 = \lambda_n$ , y que conocemos  $\rho$ , los ceros de  $u_n$  y  $\lambda_n$ , podemos resolver el problema con condiciones de borde inicial hacia atras

$$\begin{cases} -u'' = \lambda_n \rho(x) u, & x \in [0, x_1^n] \\ u(x_1^n) = 0 \\ u'(x_1^n) = 1, \end{cases}$$

comenzando el método de shooting en  $x_1^n$ , y computando los valores  $u(0)$ ,  $u'(0)$ . Por lo tanto,

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{u(0)}{u'(0)} \right),$$

o  $\alpha = \pi/2$ , si  $u'(0) = 0$ .

De manera similar, resolvemos el problema con condiciones de borde hacia adelante desde  $x_{n-1}^n$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda_n \rho(x) u, & x \in [x_{n-1}^n, 1] \\ u(x_{n-1}^n) = 0 \\ u'(x_{n-1}^n) = 1, \end{cases}$$

y obtenemos

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{u(1)}{u'(1)} \right),$$

o  $\beta = \pi/2$ , si  $u'(1) = 0$ , y queda demostrado el teorema. ■

**Observación 3.9.** Como siempre, no se puede evitar la condición de normalización  $\int_0^1 \sqrt{\rho} dt = 1$ . Notemos que las autofunciones del problema (3.4.1) con el peso  $\hat{\rho} = c\rho$  son las mismas, y los autovalores cambian a  $\lambda/c$ .

### 3.4.4. Pesos que cambian de signo

Para pesos que cambian de signo, también llamados pesos indefinidos,  $\rho = \rho^+ - \rho^-$ , el problema de autovalores (3.2.1) es similar (ver el libro de Ince [I]). Sin embargo, existen algunas diferencias: ahora hay dos sucesiones de autovalores,

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &< \lambda_2^+ < \dots < \lambda_n^+ < \dots \nearrow +\infty, \\ \lambda_1^- &> \lambda_2^- > \dots > \lambda_n^- > \dots \searrow -\infty, \end{aligned}$$

y la caracterización variacional de los mismos con  $u \in H^1(0, 1)$  se obtiene separando los que cumplen

$$\int_0^1 \rho(x)u^2(x)dx > 0,$$

para los autovalores positivos, y

$$\int_0^1 \rho(x)u^2(x)dx < 0$$

para los negativos. Se tiene entonces, la siguiente fórmula asintótica para los autovalores

$$\lambda_n^\pm = \left( \frac{\pi n}{\int_0^1 \sqrt{\rho^\pm} dx} \right)^2 + o(n^2), \quad (3.4.5)$$

ver por ejemplo [FBP].

Al permitir que la función peso  $\rho$  cambie de signo, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 3.10.** Sea  $\rho$  tal que  $\sqrt{|\rho|} \in BV[0, 1]$ , y  $\rho^+, \rho^- \neq 0$ . Sean  $\{x_0^{n,\pm}, \dots, x_n^{n,\pm}\}_{n \geq 1}$  los ceros de  $u_n^+$  y  $u_n^-$ , las autofunciones del problema (3.4.1) correspondientes a  $\lambda_n^+$  y  $\lambda_n^-$ , donde  $x_0^{n,\pm} = 0$  y  $x_n^{n,\pm} = 1$ , siendo ceros o no. Notemos  $Z_n^\pm$  a las funciones

$$Z_n^+(x) = \frac{\#\{j \geq 0: x_j^{n,+} \leq x\}}{n+1}, \quad Z_n^-(x) = \frac{\#\{j \geq 0: x_j^{n,-} \leq x\}}{n+1}.$$

Entonces, existe  $Z^\pm(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n^\pm(x)$ , y

$$Z(x)^\pm = \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{\rho(t)^\pm} dt} \int_0^x \sqrt{\rho(t)^\pm} dt. \quad (3.4.6)$$

Como ya establecimos, del Teorema 3.10 es fácil probar que pueden recuperarse  $\rho$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ .

La prueba del Teorema 3.10 es idéntica a la del Teorema 3.6.

Tengamos en cuenta primero que, dado que  $\rho$  es de variación acotada, hay a lo sumo un conjunto numerable de puntos aislados donde  $\rho$  es discontinua. Entonces, tenemos una partición numerable  $\{I_k\}_{k \geq 1} \subset [0, 1]$  en subintervalos, y  $\rho$  es continua en cada uno. Ahora,  $\rho$  es continua en cada  $I_k$ , y  $I_k^+$ ,  $I_k^-$  son conjuntos abiertos, y obtenemos una partición numerable de  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ , que llamamos  $\{J_k^+\}_{k \geq 1}$ ,  $\{J_k^-\}_{k \geq 1}$ .

Dados dichos intervalos, el punto clave ahora es que en una componente conexa  $J_k^-$  de  $\Omega^-$  podemos tener dos ceros de una autofunción  $u_n^+$  correspondiente a un autovalor positivo: supongamos que  $x_a$  y  $x_b$  son dos ceros consecutivos de  $u_n^+$ . Tenemos

$$-u_n^{+''} = \lambda_n^+ \rho u_n^+ \quad \text{en } (x_a, x_b),$$

e integrando por partes después de multiplicar por  $u_n^+$ , nos queda

$$0 \leq \int_{x_a}^{x_b} (u_n^{+'})^2 = \lambda_n^+ \int_{x_a}^{x_b} \rho (u_n^+)^2 < 0,$$

una contradicción, ya que  $\lambda_n^+ > 0$  y  $\rho < 0$ . Por lo tanto, para cualquier  $(x_a, x_b) \subset \Omega^-$  tenemos que

$$Z_n^+(x_b) - Z_n^+(x_a) \leq \frac{1}{n+1},$$

y dada cualquier subsucesión  $dZ_{n_j}^+$  que converge débilmente a alguna  $dZ^+$ , tenemos

$$\int_{x_a}^{x_b} dZ^+ = 0.$$

Por esto, dados los conjuntos de ceros de las autofunciones positivas y cada intervalo  $J_k^+$ , podemos repetir los pasos anteriores en la prueba del Teorema 3.6 para encontrar  $\rho^+$  restringida a  $J_k^+$ . También, los ceros de  $u_n^-$  son suficientes para obtener  $\rho^-$ . Una vez que  $\rho^+$  y  $\rho^-$  fueron recuperadas, los parámetros en las condiciones de borde pueden computarse como antes.

### 3.4.5. Conjunto denso de pares de nodos

En esta sección probaremos que un conjunto denso de pares de ceros consecutivos es suficiente para caracterizar el peso  $\rho$ . Hald y McLaughlin probaron en [HMc2] que un conjunto denso de pares de nodos consecutivos es suficiente para determinar  $\rho \in BV$ , asumiendo que  $0 < C \leq \rho$ . En el siguiente teorema extendemos este resultado para la clase de pesos que estamos considerando:

**Teorema 3.11.** *Sea  $\rho$  una función no negativa y continua por la derecha en  $x = 1$ , tal que  $\sqrt{\rho} \in BV[0, 1]$ . Entonces  $\rho$  está unívocamente determinada, salvo una constante multiplicativa,*

por un subconjunto denso de pares de ceros consecutivos  $x_j^n, x_{j+1}^n$  de autofunciones del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda\rho(x)u, & x \in [0, 1] \\ \cos(\alpha)u(0) - \sin(\alpha)u'(0) = 0 \\ \cos(\beta)u(1) - \sin(\beta)u'(1) = 0. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

**Demostración:** Consideraremos solo la parte positiva de  $\rho$ , la prueba para la otra parte es similar.

Supongamos que existen dos pesos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  con el mismo conjunto denso de pares de puntos nodales, que satisfacen

$$\int_0^1 \sqrt{\rho_1} dt = \int_0^1 \sqrt{\rho_2} dt.$$

Sea  $x$  un punto de continuidad tanto para  $\rho_1$  y  $\rho_2$ . Supongamos que

$$\rho_1(x) - \rho_2(x) = a > 0.$$

Entonces, existen  $\delta > 0$  y alguna constante  $c > 1$ , tal que  $c\rho_2 < \rho_1$  en  $[x - \delta, x + \delta]$ .

Ahora tomemos una sucesión de dominios nodales  $I_n = [x_{j(n)}^n, x_{j(n)+1}^n]$  con extremos en el conjunto denso anterior, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{j(n)}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{j(n)+1}^n = x.$$

Claramente, para  $n$  suficientemente grande,  $I_n \subset [x - \delta, x + \delta]$ .

Ahora consideremos los siguientes problemas de autovalores,

$$\begin{cases} -u'' = \mu^{(1)}\rho_1 u, \\ u(x_{j(n)}^n) = u(x_{j(n)+1}^n) = 0 \end{cases} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{cases} -v'' = \mu^{(2)}\rho_2 v, \\ v(x_{j(n)}^n) = v(x_{j(n)+1}^n) = 0 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Los primeros autovalores  $\mu_1^{(1)}$  y  $\mu_1^{(2)}$  coinciden con  $\lambda_n^{(1)}$  y  $\lambda_n^{(2)}$ , los  $n$ -ésimos autovalores de los problemas (3.4.7) con los pesos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  respectivamente. El teorema de comparación de Sturm establece que

$$\mu_1^{(2)} > c\mu_1^{(1)},$$

y entonces tenemos

$$1 < c < \frac{\mu_1^{(2)}}{\mu_1^{(1)}} = \frac{\lambda_n^{(2)}}{\lambda_n^{(1)}} \rightarrow 1$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que la estimación (3.4.5) implica que

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{\pi^2 n^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{\rho_1} dt\right)^2} + o(n^2),$$



$$\lambda_n^{(2)} = \frac{\pi^2 n^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{\rho_2} dt\right)^2} + o(n^2),$$

y ambas integrales son iguales, lo que es una contradicción.

Por lo tanto,  $\rho_1$  y  $\rho_2$  coinciden en aquellos puntos donde ambas funciones son continuas. Dado que ambas tienen a lo sumo numerables discontinuidades, y son continuas por derecha,  $\rho_1 = \rho_2$  en  $[0, 1]$ . ■

### 3.5. Problema Inverso en la semi-recta

En esta sección presentamos el problema inverso nodal para la siguiente ecuación diferencial ordinaria cuasi-lineal singular

$$-(|u'|^{p-2}u')' = \lambda\rho(t)|u|^{p-2}u \quad t \geq 0, \quad (3.5.1)$$

con condiciones de borde

$$u(0) = 0 \text{ and } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u(t)}{\sqrt{t}} = 0, \quad (3.5.2)$$

donde  $1 < p < \infty$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y el peso  $\rho$  satisface:

(H1)  $\rho$  es continua, positiva y monótona,

(H2)  $t^p \rho \in L^1([0, \infty))$ ,

(H3)  $\int_0^\infty \rho(t)^{1/p} dt = 1$ .

El problema de autovalores (3.5.1)-(3.5.2) fue estudiado primero para  $p = 2$  por Einar Hille en [Hi]. Mas tarde, el problema apareció relacionado al número de autovalores negativos en ecuaciones de Schrödinger, y fue estudiado por Bargmann, Calogero, y Cohn entre otros físicos y matemáticos (ver [Pi01] para mas detalles). El problema también aparece en la teoría de guías de ondas infinitas, ver por ejemplo el trabajo de Birman y Solomyak [BS].

Para  $p$  general, la existencia de una sucesión de autovalores  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  fue probada por Kusano y Naito en [KN]. Igual que en el caso lineal, cada autovalor es simple, y cualquier autofunción  $u_n$  asociada a  $\lambda_n$  tiene exactamente  $n$  ceros en  $[0, \infty)$ . Llamaremos  $X$  al conjunto nodal del problema (3.5.1)-(3.5.2), el cual se puede indexar como la doble sucesión

$$X = \left\{ \{x_j^n\}_{n \geq 1, 1 \leq j \leq n} : 0 = x_1^n < \dots < x_j^n < \dots < x_n^n, u_n(x_j^n) = 0 \right\}.$$

La monotonía de la función peso no es necesaria para obtener estos resultados, y también pueden pedirse condiciones más débiles que  $t^p \rho \in L^1$ . Sin embargo, este es un supuesto clave para poder probar la fórmula asintótica tipo Weyl para los autovalores. Para  $p = 2$ , vale la siguiente fórmula asintótica:

$$\lambda_n = \left( \frac{\pi n}{\int_0^\infty \sqrt{\rho} dt} \right)^2 + o(n^2). \quad (3.5.3)$$

Este comportamiento asintótico ha sido probado de tres formas diferentes. La primera se debe a Hille, que utilizó un argumento de shooting (ver [Hi]). En [BLS] y [NS] se presenta una prueba diferente, que utiliza técnicas de espacios de Hilbert para estimar el espectro del operador inverso, que es lineal y continuo. Una tercera prueba puede verse en el Capítulo 4 de [Pi01]. Además, asumiendo solamente que  $t\rho \in L^1([0, \infty))$ , los autovalores satisfacen una fórmula asintótica que no es de tipo Weyl, mas precisamente  $cn^\alpha < \lambda_n < Cn^\alpha$ , para constantes positivas  $c, C$ , y  $1 \leq \alpha < 2$ . En todas estas pruebas, la monotonía de  $\rho$  fue necesaria, tanto como en la cuarta prueba que presentamos en esta tesis.

Una complicación a la hora de estudiar este problema puede ser que los problemas inversos nodales se resolvían usando estimaciones muy precisas de las distancias nodales y de los autovalores. Para problemas con peso, las estimaciones de autovalores involucran la variación total de  $\log(\rho)$  y valen sólo para pesos  $\rho$  que son acotados lejos de cero; en el problema (3.5.1)-(3.5.2) esto implica que todas las soluciones oscilan y tienen infinitos ceros. Para la determinación de un potencial, se necesita la longitud de los dominios nodales, que se conoce para intervalos de longitud  $L$  y son como  $jL/n + O(1/n^2)$ , una estimación que parece difícil de generalizar para intervalos infinitos.

Para poder aplicar las mismas herramientas que para el caso de un intervalo y lograr caracterizar el peso  $\rho$  a partir de los ceros, necesitaremos resolver primero otros problemas. Primero, debemos definir una familia de medidas de probabilidad sobre la semi-recta, por lo que tenemos que probar que la sucesión  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  es concentrada, y así recuperar compacidad y una medida de probabilidad como límite. Luego, mostraremos otra manera de obtener una estimación de los autovalores como la de la ecuación (3.5.3).

### 3.5.1. La sucesión de medidas es concentrada

La siguiente cota superior para  $\lambda_n$  nos será útil en las pruebas de los Teoremas 3.13 y 3.15.

**Lema 3.12.** *Sea  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de autovalores del problema (3.5.1)-(3.5.2), con  $\rho$  satisfaciendo (H1)-(H3), y  $u_n$  tiene un cero mayor que  $x_0 \in (0, \infty)$ . Entonces*

$$\lambda_n \leq \frac{\pi_p^p n^p}{\rho(x_0)} \quad (3.5.4)$$

**Demostración:** Consideremos el siguiente problema de autovalores,

$$\begin{cases} -( |u'|^{p-2} u' )' &= \hat{\lambda} \rho(x_0) |u|^{p-2} u & x \in (0, x_0) \\ u(0) &= 0 \\ u(x_0) &= 0, \end{cases} \quad (3.5.5)$$

los autovalores están dados por  $\hat{\lambda}_n = \pi_p^p n^p / \rho(x_0)$ .

Por el teorema de comparación de Sturm 3.2, dado que  $\rho(x_0) \leq \rho$  en  $[0, x_0]$ , y  $u_n$  tiene menos de  $n$  ceros en  $[0, x_0]$ , tenemos

$$\lambda_n \leq \hat{\lambda}_n = \frac{\pi_p^p n^p}{\rho(x_0)},$$

y el resultado queda probado. ■

**Teorema 3.13.** *Sea  $X$  el conjunto nodal del problema (3.5.1)-(3.5.2), con  $\rho$  tal que valen (H1)-(H3), y sea  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de medidas definida como*

$$\mu_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j^n}$$

donde  $x_j^n \in X$ , y  $\delta_y = \delta(x - y)$  es la función delta de Dirac centrada en  $y$ . Entonces  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  es concentrada.

**Demostración:**

Sea  $\varepsilon > 0$  fijo. De (H3), como  $x^p \rho \in L^1([0, \infty))$ , usando la desigualdad de Hölder podemos elegir  $T > 1$  tal que

$$\int_T^\infty \rho^{1/p}(x) dx \leq (p-1)^{\frac{p-1}{p}} T^{-\frac{1}{p}} \left( \int_T^\infty x^p \rho(x) dx \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Sea  $n_0$  tal que  $u_n$  tiene al menos dos ceros mayores que  $\max\{1, T\}$  si  $n \geq n_0$ . Si  $y_1^n < \dots < y_{k(n)}^n$  son los ceros de  $u_n$  en  $[T, \infty)$ , busquemos una cota superior para  $k(n)$ .

Aplicando la desigualdad (3.3.2) entre dos ceros consecutivos, y dado que el primer autovalor entre dos ceros consecutivos coincide con  $\lambda_n$ , obtenemos

$$\begin{aligned} k(n) - 1 &\leq \frac{2}{\pi_p} \sum_{j=1}^{k(n)-1} \lambda_n^{1/p} \int_{y_j^n}^{y_{j+1}^n} \rho^{1/p}(x) dx \\ &\leq \frac{2\lambda_n^{1/p}}{\pi_p} \int_T^\infty \rho^{1/p}(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon 2\lambda_n^{1/p}}{\pi_p}. \end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 3.3 y el lema 3.12, podemos acotar  $\lambda_n \leq \hat{\lambda}_n$ , el  $n$ -ésimo autovalor del problema (3.5.5) con  $x_0 = 1$ , y de la fórmula explícita para autovalores en el Teorema 3.4, obtenemos

$$k(n) \leq \frac{\varepsilon 2 \hat{\lambda}_n^{1/p}}{\pi_p} + 1 \leq \frac{\varepsilon 2n}{\rho(1)^{1/p}} + 1.$$

Ahora,

$$\mu_n([T, \infty)) = \frac{\#\{j : x_j^n \in [T, \infty)\}}{n} = \frac{k(n)}{n} \leq \frac{2\varepsilon}{\rho(1)^{1/p}} + \frac{1}{n},$$

y por lo tanto la sucesión  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  es concentrada. ■

**Observación 3.14.** Notemos que la monotonía de  $\rho$  es necesaria ya que la prueba depende del Teorema 3.5. La prueba puede ser extendida para funciones  $\rho$  que son decrecientes en  $[x_0, \infty)$  para algún  $x_0$ . Solo tenemos que tomar  $T > x_0$ , y en el último paso de la prueba podemos considerar cualquier intervalo  $[x_0, x_0 + \delta]$  en lugar de  $[0, 1]$ .

### 3.5.2. Autovalores

Veamos como puede obtenerse el comportamiento asintótico de los autovalores para el problema en la semi-recta.

**Teorema 3.15.** *Sea  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de autovalores del problema (3.5.1)-(3.5.2), tal que  $\rho$  satisface (H1)-(H3). Entonces*

$$\lambda_n = \pi_p^p n^p + o(n^p) \quad (3.5.6)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

#### Demostración:

Para probar que  $\lambda_n = \pi_p^p n^p + o(n^p)$ , es suficiente probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\pi_p^p n^p} = 1. \quad (3.5.7)$$

Sea  $\varepsilon > 0$  fijo. Como ya vimos antes, existe  $T > 0$  tal que

$$\int_T^\infty \rho^{1/p} dt < \varepsilon. \quad (3.5.8)$$

Comparemos los autovalores del problema (3.5.1)-(3.5.2) con  $\{\hat{\lambda}_n\}_{n \geq 1}$ , los autovalores de

$$\begin{cases} -(|v'|^{p-2}v)' &= \hat{\lambda}_p |v|^{p-2}v & x \in (0, T) \\ v(0) &= 0 \\ v(T) &= 0, \end{cases} \quad (3.5.9)$$

Recordemos que los autovalores satisfacen

$$\hat{\lambda}_n = \frac{\pi_p^p n^p}{\left(\int_0^T \rho^{1/p}(x) dx\right)^p} + o(n^p),$$

y vamos a fijar algún  $n_0$  que satisfice dos condiciones. Primero necesitamos que el valor absoluto del término de error  $o(n)$  en la fórmula previa esté acotado por  $\varepsilon n^p$ . La otra condición la impondremos mas adelante.

Afirmamos que  $\lambda_n \leq \hat{\lambda}_n$  para cualquier  $n \geq 1$ . De lo contrario, por el teorema de comparación de Sturm 3.2,  $u_n$  tiene al menos  $n$  ceros en  $(0, T)$ , pero también  $u_n(0) = 0$ , lo cual nos da al menos  $n + 1$  ceros, pero  $u_n$  tiene sólo  $n$  ceros, una contradicción. Entonces,

$$\lambda_n \leq \hat{\lambda}_n \leq \frac{\pi_p^p n^p}{(1 - \varepsilon)^p} + \varepsilon n^p = \pi_p^p n^p + \left(\frac{1 - (1 - \varepsilon)^p}{(1 - \varepsilon)^p} + \varepsilon\right) n^p \quad (3.5.10)$$

para  $n \geq n_0$  debido a (H3) y la cota (3.5.8). Llamemos

$$C_\varepsilon := \frac{1 - (1 - \varepsilon)^p}{(1 - \varepsilon)^p} + \varepsilon,$$

y notemos que  $C_\varepsilon = O(\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Para obtener una cota inferior para  $\lambda_n$ , estimamos el número de ceros de  $u_n$  en  $[0, T]$  y  $[T, \infty)$ . Como en la prueba del Teorema 3.13, llamamos  $k(n)$  al número de ceros de  $u_n$  en  $(T, \infty)$ , y tenemos

$$k(n) \leq \frac{\varepsilon 2\lambda_n^{1/p}}{\pi_p} + 1 \leq \varepsilon n \frac{2(\pi_p^p + C_\varepsilon)^{1/p}}{\pi_p(1-\varepsilon)} + 1,$$

esta última desigualdad debida a la cota obtenida en (3.5.10). Para abreviar, llamemos

$$D_\varepsilon := \frac{2(\pi_p^p + C_\varepsilon)^{1/p}}{\pi_p(1-\varepsilon)}$$

y notemos que  $D_\varepsilon \rightarrow 2$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Entonces,  $u_n$  tiene al menos  $n - k(n) \geq n(1 - \varepsilon D_\varepsilon) - 1$  ceros en  $[0, T]$ , y definamos

$$m = \lfloor n(1 - \varepsilon D_\varepsilon) - 1 \rfloor - 1,$$

donde  $\lfloor x \rfloor$  es la parte entera de  $x$ . Aquí establecemos la segunda condición sobre  $n_0$ : necesitamos  $m \geq n_0$  para utilizar nuevamente la cota del término de error en la fórmula asintótica de los autovalores.

Sea  $v_m$  la autofunción correspondiente a  $\hat{\lambda}_m$  en el problema (3.5.9). Comparando el número de ceros en  $[0, T]$  de  $u_n$  y  $v_m$ , el teorema de comparación de Sturm 3.2 implica que

$$\hat{\lambda}_m \leq \lambda_n.$$

Usando la fórmula asintótica para  $\hat{\lambda}_m$ , y por (H3), obtenemos

$$\lambda_n \geq \hat{\lambda}_m \geq \pi_p^p m^p - \varepsilon m^p \geq (\pi_p^p - \varepsilon)(n(1 - \varepsilon D_\varepsilon) - 3)^p,$$

es decir que

$$\lambda_n \geq \pi_p^p n^p \left( \frac{\pi_p^p - \varepsilon}{\pi_p^p} \right) \left( 1 - \varepsilon D_\varepsilon - \frac{3}{n} \right)^p. \quad (3.5.11)$$

Finalmente, de las cotas (3.5.10) y (3.5.11), tenemos

$$\left( \frac{\pi_p^p - \varepsilon}{\pi_p^p} \right) \left( 1 - \varepsilon D_\varepsilon - \frac{3}{n} \right)^p \leq \frac{\lambda_n}{\pi_p^p n^p} \leq 1 + C_\varepsilon,$$

y entonces vale (3.5.7). ■

### 3.5.3. Problema nodal inverso en la semi-recta

Comenzamos con probar que  $\mu_n \rightarrow \mu$ , y luego caracterizaremos la medida límite con el peso  $\rho$ .

**Teorema 3.16.** Sea  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de medidas definida como

$$\mu_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j^n}.$$

Entonces,  $\mu_n$  converge débilmente a  $\mu$ , donde

$$\mu([a, b]) = \int_a^b \rho^{1/p} dt$$

para todo  $[a, b] \subset [0, \infty)$ .

**Demostración:**

Sea  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  la sucesión de funciones de distribución asociadas a las medidas  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ . Del teorema de selección de Helly 2.50, existe una subsucesión convergente  $\{F_{n_j}\}_{j \geq 1}$  y una función límite  $F$ . El teorema de Prokhorov nos dice que existe una medida de probabilidad  $\mu = dF$ , y que

$$\int_0^\infty f(x) d\mu_{n_j} \rightarrow \int_0^\infty f(x) d\mu,$$

para cualquier  $f \in C_0(\mathbb{R})$ , lo que implica que  $\mu_n([a, b]) \rightarrow \mu([a, b])$ .

Ahora mostremos que, para cualquier  $x > 0$ , tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \int_0^x \rho^{1/p} dt. \quad (3.5.12)$$

Fijemos  $\varepsilon > 0$ . Como  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  es una sucesión concentrada, existe  $T > 0$  tal que  $\mu_n([0, T]) > 1 - \varepsilon/2$ , y entonces tenemos  $F_n(T) > 1 - \varepsilon/2$ . Además, podemos tomar  $T$  suficientemente grande tal que, de nuevo,

$$\int_T^\infty \rho^{1/p} dt < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.5.13)$$

Primero, consideremos  $x \leq T$ . Subdividamos el intervalo  $[0, x]$  en  $M$  subintervalos de longitud  $h = x/M$ . La longitud  $h$  es suficientemente pequeña para que

$$0 \leq S_i^{1/p} - s_i^{1/p} < \frac{\varepsilon}{4T}$$

para  $1 \leq i \leq M$ , donde

$$s_i = \inf\{\rho(t) : t \in [(i-1)h, ih]\},$$

$$S_i = \sup\{\rho(t) : t \in [(i-1)h, ih]\}.$$

Como  $\rho$  es continua, es integrable Riemann en  $[0, T]$  y

$$\sum_{i=1}^M h s_i^{1/p} \leq \int_0^x \rho^{1/p} dt \leq \sum_{i=1}^M h S_i^{1/p}. \quad (3.5.14)$$

Además, hemos elegido  $h$  de manera tal que tengamos

$$\sum_{i=1}^M h S_i^{1/p} - \sum_{i=1}^M h s_i^{1/p} < \sum_{i=1}^M \frac{\varepsilon h}{4T} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.5.15)$$

Aproximemos las medidas  $\mu_n$  en cada intervalo. Sea  $k_i^n$  el número de ceros de  $u_n$  en los intervalos  $[(i-1)h, ih)$ , con  $1 \leq i \leq M$  (tomamos el último cerrado, i.e.,  $[(M-1)h, Mh]$ ). Entonces,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^M k_i^n = F_n(x).$$

Podemos estimar cada  $k_i^n$  usando el teorema de comparación de Sturm 3.2. Como  $s_i \leq \rho \leq S_i$  en  $[(i-1)h, ih)$ , comparando con la solución explícita  $\sin_p(t)$  para problemas con coeficientes constantes obtenemos

$$\frac{\lambda_n^{1/p} s_i^{1/p} h}{\pi_p} - 1 \leq k_i^n \leq \frac{\lambda_n^{1/p} S_i^{1/p} h}{\pi_p} + 1.$$

Entonces,

$$\frac{\lambda_n^{1/p}}{n\pi_p} \sum_{i=1}^M s_i^{1/p} h - \frac{M}{n} \leq F_n(x) \leq \frac{\lambda_n^{1/p}}{n\pi_p} \sum_{i=1}^M S_i^{1/p} h + \frac{M}{n}. \quad (3.5.16)$$

Por lo tanto, por las desigualdades (3.5.14), (3.5.15) y (3.5.16), tenemos

$$\begin{aligned} F_n(x) - \int_0^x \rho^{1/p} dt &\leq \frac{\lambda_n^{1/p}}{n\pi_p} \sum_{i=1}^M S_i^{1/p} h + \frac{M}{n} - \sum_{i=1}^M h s_i^{1/p} \\ &\leq \frac{\lambda_n^{1/p}}{n\pi_p} \sum_{i=1}^M (S_i^{1/p} h - h s_i^{1/p}) + \frac{M}{n} + \left( \frac{\lambda_n^{1/p}}{n\pi_p} - 1 \right) \sum_{i=1}^M s_i^{1/p} h \\ &\leq \frac{\varepsilon \lambda_n^{1/p}}{4n\pi_p} + \frac{M}{n} + \left| \frac{\lambda_n^{1/p}}{n\pi_p} - 1 \right| \\ &= O(\varepsilon), \end{aligned}$$

para  $n$  suficientemente grande, por el Teorema 3.15, y porque  $M$  está fijo.

Puede encontrarse una cota inferior de la misma manera, y entonces el límite (3.5.12) se prueba para  $x \leq T$  ya que  $\varepsilon$  es arbitrario.

Finalmente, para  $x > T$  y  $n$  grandes, tenemos

$$\begin{aligned} \left| F_n(x) - \int_0^x \rho^{1/p}(t) dt \right| &\leq |F_n(x) - F_n(T)| + \\ &+ \left| F_n(T) - \int_0^T \rho^{1/p}(t) dt \right| \\ &+ \left| \int_0^T \rho^{1/p}(t) dt - \int_0^x \rho^{1/p}(t) dt \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

y así queda probado el teorema. ■

### 3.5.4. Unicidad dado un conjunto denso de ceros

Estamos en condiciones de probar que basta con un conjunto denso de nodos para caracterizar al peso.

**Teorema 3.17.** *Sea  $S = \{x_{j(n)}^n\} \subset X$  cualquier subconjunto denso de ceros de autofunciones del problema (3.5.1)-(3.5.2). Entonces, existe un único peso  $\rho$  que satisface (H1)-(H3) tal que  $x_{j(n)}^n$  es el  $j(n)$ -ésimo cero de la  $n$ -ésima autofunción.*

**Demostración:** Sean  $\{F_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{G_n\}_{n \geq 1}$  las funciones de distribución de las medidas  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$ ,  $\{\hat{\mu}_n\}_{n \geq 1}$  correspondientes a los ceros del problema (3.5.1)-(3.5.2) con pesos  $\rho$  y  $\sigma$  respectivamente, ambos satisfaciendo (H1)-(H3).

Asumamos que existe un subconjunto denso de ceros  $S = \{x_{j(n)}^n\} \subset X$  tal que

$$F_n(x_{j(n)}^n) = G_n(x_{j(n)}^n).$$

Sabemos, por el Teorema 3.16 y el Lema 2.51, que  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  y  $\{G_n\}_{n \geq 1}$  convergen uniformemente a  $F$  y  $G$ , donde

$$F(x) = \int_0^x \rho^{1/p}(t) dt, \quad G(x) = \int_0^x \sigma^{1/p}(t) dt.$$

Fijemos ahora un  $\varepsilon > 0$ . Por la convergencia uniforme existe algún  $n_0$  tal que, para  $n \geq n_0$ , tenemos

$$\|F_n - F\|_\infty + \|G_n - G\|_\infty < \varepsilon/2.$$

Además, de la prueba del Lema 2.51, sabemos que existe un  $\delta > 0$  para el cual

$$|F(x) - F(y)| + |G(x) - G(y)| < \varepsilon/2$$

siempre que  $|x - y| < \delta$ .



Sea  $x \in [0, \infty)$ , y queremos ver ahora que  $|F(x) - G(x)| < \varepsilon$ . Como  $S$  es denso, podemos elegir algún cero  $y_{j(n)}^n \in S$  que satisface  $|x - y_{j(n)}^n| < \delta$  y  $n \geq n_0$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |F(x) - G(x)| &\leq |F(x) - F(y_{j(n)}^n)| + |F(y_{j(n)}^n) - F_n(y_{j(n)}^n)| \\ &\quad + |F_n(y_{j(n)}^n) - G_n(y_{j(n)}^n)| \\ &\quad + |G_n(y_{j(n)}^n) - G(y_{j(n)}^n)| + |G(y_{j(n)}^n) - G(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

y obtenemos la cota buscada.

Como  $\varepsilon$  es arbitrario, tenemos  $F(x) = G(x)$  para cualquier  $x$ , y la continuidad de los pesos junto con el Teorema Fundamental del Cálculo implican que  $\rho = \sigma$ . ■

**Observación 3.18.** Los resultados de [HMc1, HMc2] para  $p = 2$  en intervalos acotados requieren un conjunto denso de pares de ceros consecutivos. La demostración anterior puede ser fácilmente extendida a estos problemas asumiendo solamente que el peso  $\rho$  es continuo por derecha, que  $\sqrt{\rho} \in BV([0, 1])$ , y los resultados de la sección anterior.

### 3.5.5. Comentarios finales

Hacemos a continuación algunos comentarios para finalizar esta sección.

**Observación 3.19.** Las demostraciones de las secciones 3.4.1-3.4.4 pueden ser modificadas para tratar el problema de autovalores

$$-(\sigma(x)v')' = \lambda v.$$

Más aún, para

$$-(\sigma(x)u')' = \lambda\rho(x)u,$$

si conocemos  $\sigma$ , los dominios nodales de una sucesión de autofunciones o un conjunto denso de ceros determinan  $\rho$ . También podemos determinar  $\sigma$  dado  $\rho$  y los ceros de una sucesión de autofunciones o un conjunto denso de ceros.

**Observación 3.20.** Ha habido mucho interés en la determinación de un potencial  $q$  para

$$-u'' + qu = \lambda u$$

a partir de información nodal, ver por ejemplo [LaY, GW, Mc]. No estamos seguros que las ideas detrás de la demostración del Teorema 3.6 pueden ser aplicadas a este problema. Sin embargo, se sabe que este problema necesita de menos información, sólo un conjunto denso de nodos en una parte del intervalo.

**Observación 3.21.** Si tenemos los ceros de  $u_n^+$  y  $u_n^-$  como dos sucesiones de conjuntos  $\{x_j^n\}$ ,  $\{\hat{x}_j^n\}$ , para pesos indefinidos surge un nuevo problema, ya que necesitamos saber cuales corresponden a los autovalores positivos y negativos.

Para esto, si  $\rho \geq c > 0$  en algún entorno de  $x$ , digamos  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , el número de ceros de las autofunciones positivas  $u_n^+$  van a infinito cuando  $n \rightarrow \infty$ , como consecuencia del Lema 3.1. Además, dado un autovalor negativo  $\lambda_n^-$ , la autofunción correspondiente  $u_n^-$  tiene a lo sumo un solo cero en  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ .

Entonces, para  $n$  suficientemente grande, tomamos  $x \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon > 0$  arbitrario, y solo uno de los dos conjuntos  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \{x_j^n\}$  y  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap \{\hat{x}_j^n\}$  puede contener dos o mas ceros. Si ambos conjuntos contienen dos o mas elementos, necesitamos tomar un valor de  $\varepsilon$  mas pequeño. Sin embargo, los ceros de autofunciones de autovalores positivos y negativos se concentrarán en subconjuntos diferentes de  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , y entonces es posible clasificar las sucesiones.

Recordemos que para pesos positivos podemos recuperar  $\rho$  imponiendo la condición extra  $\int_0^1 \sqrt{\rho} = 1$ . De mas está decir que podemos considerar el mismo problema con pesos indefinidos, pero ahora no sabemos qué sucesión corresponde a los autovalores positivos y negativos. Igual que antes, como  $\lambda\rho = c\lambda\rho/c$ , los autovalores negativos del problema con  $\rho$  son los positivos del problema con  $-\rho$ . En este caso, podemos determinar dos funciones que corresponden a  $\rho^+$  y  $\rho^-$ , aunque no sabemos como decidir cual de las dos es la parte positiva.

**Observación 3.22.** La prueba del Teorema 3.6 sugiere una manera posible de tratar problemas inversos de mayor dimensión. Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado, y consideremos el siguiente problema de autovalores:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\rho u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

Dada la autofunción asociada a  $\lambda_n$  con  $k$  dominios nodales, podemos definir una medida de probabilidad  $\mu_n$  en  $\Omega$ ,

$$\mu_n = \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j}{k \cdot |\Omega_j|}$$

donde  $\mu_j$  es la medida Lebesgue restringida al dominio nodal  $\Omega_j$ , y  $|A|$  denota la medida Lebesgue de un conjunto  $A$ .

Ahora, el teorema de Prokhorov nos dice que existe un límite débil  $\mu$ , y la fórmula de Weyl para la distribución de autovalores sugiere que

$$\int_A d\mu = \int_A \rho^{N/2}(x) dx.$$

Pero dado que la estructura de los dominios nodales correspondientes a autovalores de mayor orden son muy complejos, creemos que puede ser muy difícil de probar.

# 4

---

## Autovalores de $-\Delta_\mu$

Vamos a concentrarnos en este capítulo en los siguientes problemas de autovalores para el operador  $\Delta_\mu$  definido en la sección 2.8:

$$(Dirichlet) \quad \begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda u \\ u(a) = 0 = u(b), \end{cases} \quad (4.0.1)$$

$$(Neumann) \quad \begin{cases} -\Delta_\mu u = \gamma u \\ u'(a) = 0 = u'(b), \end{cases} \quad (4.0.2)$$

donde  $\lambda$  y  $\gamma$  son reales,  $\mu$  es una medida Borel positiva sin átomos, soportada en algún subconjunto de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

En la sección 4.1 probamos la siguiente desigualdad tipo Lyapunov

$$\frac{4}{b-a} \leq \int_a^b \rho(x) d\mu(x),$$

que involucra a la función peso  $\rho \in L^1((0, 1), \mu)$ , no negativa, y una solución no trivial  $u$  del problema. A pesar de su aparente sencillez, este tipo de desigualdades tiene consecuencias importantes. En el caso clásico, la desigualdad de Lyapunov es una herramienta muy útil, que tiene aplicaciones en estimaciones de estabilidad [Bo2, Kr], oscilación y condiciones de disconjugación [HK, Har, HW], cotas para autovalores [dNP1, dNP2, Ha, Pi], y teoría de homogenización [FBPS] entre otros (ver los recientes surveys [CV, Pi01]). Si  $\mu = \mathcal{L}$  es la medida Lebesgue, recuperamos la misma constante del lado izquierdo de la desigualdad que en la desigualdad original. Sin embargo, es posible obtener mejores cotas para medidas particulares, por ejemplo aquellas que están asociadas a conjuntos autosimilares.

La sección 4.2 está dedicada a estos problemas cuando  $\mu$  es una convolución Bernoulli infinita. El problema de autovalores para el operador Laplaciano correspondiente ha sido ampliamente estudiado por Ngai y sus coautores en [BNT, ChNg, DeNg, Ng]. Observemos que el soporte de estas medidas incluyen tanto fractales como el conjunto ternario de Cantor, como conjuntos mas

complejos, dado que se permiten solapamientos cuando  $r > 1/2$ , y en este rango la medida puede ser absolutamente continua o singular respecto a la medida Lebesgue. Al final de dicha sección probamos una extensión para un teorema probado recientemente por Deng y Ngai en [DeNg], donde se especifican cotas inferiores para el primer autovalor de  $\Delta_\mu$ , y cotas inferiores y superiores para autovalores de mayor orden.

## 4.1. Desigualdades tipo Lyapunov

Comenzamos con el siguiente lema:

**Lema 4.1.** *Sea  $\rho$  una función no negativa en  $L^1((0, 1), \mu)$ , y sea  $u$  una solución no trivial del problema*

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \rho(x)u \\ u(a) = 0 = u'(b). \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Entonces vale la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{b-a} \leq \int_a^b \rho(x) d\mu(x). \quad (4.1.2)$$

**Demostración:** Elijamos  $c \in [a, b]$  donde  $|u|$  alcanza el máximo. Recordemos del Lema 2.56 que podemos elegir  $c \in K_\mu$ , y  $u'(c) = 0$ .

Ahora, del Lema 2.55 y la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} u^2(c) &= \left( \int_a^c u'(x) dx \right)^2 \\ &\leq (c-a) \int_a^c u'^2(x) dx \\ &\leq (b-a) \int_a^b u'^2(x) dx \\ &= (b-a) \mathcal{E}(u', u') \\ &= (b-a) \int_a^b \rho(x) u^2(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

pues  $u$  es una solución débil.

Finalmente, dado que  $u^2(x) \leq u^2(c)$ , tenemos que

$$u^2(c) \leq u^2(c)(b-a) \int_a^b \rho(x) d\mu(x)$$

y entonces queda probado el lema. ■

**Observación 4.2.** La misma cota vale si intercambiamos las condiciones de borde,  $u'(a) = 0 = u(b)$ .

**Observación 4.3.** Una cota mejor puede obtenerse si  $\rho$  cambia de signo. Tenemos

$$\int_a^b \rho(x)u^2(x)d\mu(x) \leq \int_a^b \rho^+(x)u^2(x)d\mu(x),$$

donde  $\rho^+$  está definida como

$$\rho^+(x) = \begin{cases} \rho(x) & \text{if } \rho(x) \geq 0, \\ 0 & \text{if } \rho(x) < 0, \end{cases}$$

y entonces la desigualdad queda

$$1 \leq (b-a) \int_a^b \rho^+ d\mu.$$

Estamos en condiciones de probar la siguiente desigualdad tipo Lyapunov:

**Teorema 4.4.** Sea  $\rho \in L^1((0, 1), \mu)$  una función no negativa, y sea  $u$  una solución no trivial del problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \rho(x)u \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Entonces vale la siguiente desigualdad:

$$\frac{4}{b-a} \leq \int_a^b \rho(x)d\mu(x).$$

**Demostración:** Tomemos  $c \in K_\mu \subset (a, b)$  tal que  $u'(c) = 0$ . Este punto existe pues  $u$  alcanza su máximo. Aplicando el Lema 4.1 en  $(a, c)$  y  $(c, b)$ , tenemos que

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \leq \int_a^c \rho d\mu + \int_c^b \rho d\mu = \int_a^b \rho d\mu.$$

La desigualdad de la media aritmética-harmónica (ver Lema 2.2) nos permite concluir que

$$\frac{4}{b-a} \leq \frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c},$$

y el teorema queda demostrado. ■

Como consecuencia, tenemos:

**Teorema 4.5.** Sea  $\mu$  una medida de probabilidad Borel sin átomos y sea  $\lambda_1^\mu$  el primer autovalor de

$$-\Delta_\mu u = \lambda u,$$

con  $u(0) = 0 = u(1)$ . Entonces  $\lambda_1^\mu \geq 4$ .

**Demostración:** El resultado sale de reemplazar  $\rho$  por  $\lambda_1$  en la integral del lado derecho de la desigualdad de Lyapunov (4.1.2), y como  $\mu$  es una medida de probabilidad, el resultado se deduce inmediatamente. ■

**Observación 4.6.** Dado un intervalo  $[a, b]$ , y cualquier medida Borel positiva sin átomos con  $\mu([a, b]) > 0$ , el mismo argumento muestra que el primer autovalor del Laplaciano Dirichlet  $-\Delta_\mu$  satisface

$$\frac{4}{b-a} \leq \lambda_1^\mu[a, b].$$

Veamos ahora una cota inferior para el segundo autovalor Neumann. Recordemos que el primero es cero, y la autofunción asociada es constante. Para mas detalles sobre este problema de autovalores ver el Teorema 2.53.

**Teorema 4.7.** Sea  $\mu$  una medida Borel positiva sin átomos con  $\mu([a, b]) > 0$ ,  $\rho$  como en el Teorema 3.6, y sea  $\gamma_2^\mu$  el segundo autovalor Neumann del problema (2.8.2). Entonces

$$\frac{4}{b-a} \leq \gamma_2^\mu \int_a^b \rho d\mu.$$

**Demostración:** Sea  $c \in (a, b)$  el cero de la primer autofunción  $u$ . Por el Lema 4.1,

$$\frac{1}{c-a} + \frac{1}{b-c} \leq \gamma_2^\mu \int_a^c \rho d\mu + \gamma_2^\mu \int_c^b \rho d\mu = \gamma_2^\mu \int_a^b \rho d\mu,$$

y usando la desigualdad de la media aritmética-harmónica en el Lema 2.2, queda demostrado el resultado. ■

## 4.2. Convoluciones Bernoulli infinitas

Hasta ahora, hemos seguido las ideas del caso clásico, sin aprovechar las propiedades particulares de la medida  $\mu$  y su soporte. Veamos cómo podemos mejorar las cotas para los autovalores para medidas que son absolutamente continuas respecto a una convolución Bernoulli infinita.

### 4.2.1. Una cota inferior para el primer autovalor

Consideraremos el siguiente sistema iterado de funciones

$$S_1(x) = rx, \quad S_2(x) = rx + 1, \quad 0 < r < 1, \quad (4.2.1)$$

con  $p \in (0, 1)$ , y la medida autosimilar  $\mu_{r,p}$  asociada tal que

$$\mu_{r,p}(A) = p\mu_{r,p} \circ S_1^{-1}(A) + (1-p)\mu_{r,p} \circ S_2^{-1}(A) \quad (4.2.2)$$

para todo conjunto Borel  $A \subset \mathbb{R}$ .

Recientemente se ha probado el siguiente resultado:

**Teorema 4.8.** [Deng and Ngai, Teorema 1.2 en [DeNg]] Sea  $\mu_r$  una convolución Bernoulli infinita sobre  $[0, 1]$  definida en (4.2.2) con  $p = 1/2$ . Sea  $\lambda_1^{\mu_r}$  el primer autovalor Dirichlet de  $-\Delta_{\mu_r}$  en  $[0, 1]$ . Entonces  $\lambda_1^{\mu_r} > \pi$ . De hecho,

- (a) para  $r \in (0, 1/2]$ ,  $\lambda_1^{\mu_r} \geq 4/r$ ;
- (b) para  $r \in (1/2, 2/3]$ ,  $\lambda_1^{\mu_r} \geq 24/7$ ;
- (c) para  $r \in (2/3, 1)$ ,  $\lambda_1^{\mu_r} \geq 3,2$ .

Hemos podido extender este teorema de la siguiente manera:

**Teorema 4.9.** *Dado el sistema iterado de funciones*

$$S_1(x) = r_1x, \quad S_2(x) = r_2x + (1 - r_2), \quad 0 < r_1 \leq r_2 < 1,$$

sea  $\nu$  una medida de probabilidad absolutamente continua respecto a  $\mu_p$ , definida como la única medida invariante

$$\mu_p(A) = p\mu_p \circ S_1^{-1}(A) + (1 - p)\mu_p \circ S_2^{-1}(A)$$

para  $0 < p < 1$ . Sea  $\lambda_1^\nu$  el primer autovalor Dirichlet de  $-\Delta_\nu$  en  $[0, 1]$ . Entonces  $\lambda_1^\nu \geq 4$ . Además, si  $0 < r_1 \leq r_2 < 1/2$ , entonces

$$\lambda_1^\nu \geq \frac{1}{r_2(1 - r_2)}.$$

**Demostración:** Observemos que  $\lambda_1^\nu \geq 4$  sale directamente del Teorema 4.5 y la Observación 4.6, pues  $\nu$  es una medida de probabilidad.

Resta probar solo la última desigualdad. Dado que la primera autofunción  $u_1^\nu$  crece linealmente o es constante en  $(r_1, 1 - r_2)$ , el máximo se alcanza en algún punto  $b$ , con  $b \in (0, r_1)$  o  $b \in (1 - r_2, 1)$ . Entonces, como en el Lema 4.1, tenemos que

$$\frac{1}{r_2(1 - r_2)} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{1 - b} \leq \lambda_1^\nu,$$

ya que  $r_1 \leq r_2$ , y queda demostrado el resultado. ■

**Observación 4.10.** La prueba sale directamente del Teorema 4.4, mientras que Deng y Ngai utilizan la simetría de la medida y las propiedades de concavidad de la primera autofunción. Las estimaciones numéricas son levemente peores que las del Teorema 4.8 si  $p = 1/2$  y  $r_1 = r_2$ , pero nuestro resultado abarca todas las convoluciones Bernoulli infinitas, y muchas otras medidas al pedir simetría.

#### 4.2.2. Cotas inferiores y superiores para autovalores

Para el caso en que  $r_1 = r_2$  y  $p = 1/2$ , hemos podido probar el siguiente teorema:

**Teorema 4.11.** *Sea  $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$  la sucesión de autovalores Dirichlet de  $-\Delta_{\mu_r}$ , donde  $\mu_r$  es la convolución Bernoulli que satisface la identidad (4.2.2), con  $r \in (0, 1/2)$  y  $p = 1/2$ . Entonces*

$$r^2 k^{\log(2/r)/\log(2)} \leq \lambda_k \leq \left(\frac{2}{r}\right)^3 k^{\log(2/r)/\log(2)}. \quad (4.2.3)$$

**Demostración:**

Dividimos la demostración en tres partes.

(i) *Cota superior cuando  $k = 2^n$ .*

Para encontrar una cota superior para  $\lambda_k$ , construimos un subespacio de  $\mathcal{D}_{\mu,0}^{1,2}$   $k$ -dimensional  $L$ , y escribimos el cociente de Rayleigh (2.8.3) para sus funciones.

Para eso, tomemos los intervalos

$$J_1 = [0, r^n], \dots, J_{2^n} = [(1-r)^n, 1],$$

cada uno correspondiente a la imagen de una composición diferente de  $k$  similitudes seleccionadas de las  $S_1$  y  $S_2$  introducidas en (4.2.1),

$$S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_n}([0, 1]).$$

Para  $1 \leq i \leq 2^n$ , llamemos  $J_i = [a_i, b_i]$ , y definamos las funciones

$$v_i(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_i, \\ (x - a_i)/r^{n+2} & a_i \leq x \leq a_i + r^{n+2}, \\ 1 & a_i + r^{n+2} \leq x \leq b_i - r^{n+2}, \\ (b_i - x)/r^{n+2} & b_i - r^{n+2} \leq x \leq b_i, \\ 0 & b_i \leq x. \end{cases}$$

Sea  $L = \text{span}\{v_i : 1 \leq i \leq 2^n\}$ . Este subespacio tiene dimensión  $2^n$ , dado que los interiores de los soportes de las funciones  $\{v_i\}_{1 \leq i \leq 2^n}$  son disjuntos.

Tomemos cualquier  $u \in L$  no trivial,  $u = \sum c_i v_i$ , y tenemos

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{\int_0^1 (\sum c_i v_i'(x))^2 dx}{\int_0^1 (\sum c_i v_i(x))^2 d\mu_r(x)} \\ &= \frac{\sum c_i^2 \int_0^1 v_i'^2(x) dx}{\sum c_i^2 \int_0^1 v_i^2(x) d\mu_r(x)}. \end{aligned}$$

Ahora, debido a la propiedad de escalado y la invarianza de la medida bajo composiciones de las transformaciones  $S_i$ , podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_1'^2(x) dx &= \int_0^1 v_i'^2(x) dx \\ \int_0^1 v_1^2(x) d\mu_r(x) &= \int_0^1 v_i^2(x) d\mu_r(x) \end{aligned}$$

para  $1 \leq i \leq 2^n$ , lo que implica que

$$R(u) = \frac{\int_0^1 v_1'^2(x) dx}{\int_0^1 v_1^2(x) d\mu_r(x)}.$$



Nos resta estimar estas integrales. Tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 v_1^2(x) dx &= \int_0^{r^{n+2}} \frac{1}{r^{2(n+2)}} dx + \int_{r^n - r^{n+2}}^{r^n} \frac{1}{r^{2(n+2)}} dx, \\ &= \frac{2}{r^{n+2}}, \\ \int_0^1 v_1^2(x) d\mu_r(x) &\geq \mu_r[r^{n+2}, r^n - r^{n+2}] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\lambda_{2^n} \leq \left(\frac{2}{r}\right)^{2+n}.$$

Recordando que  $k = 2^n$ , tomando logaritmos y reordenando, obtenemos

$$\lambda_k \leq \left(\frac{2}{r}\right)^2 k^{\log(2/r)/\log(2)}. \quad (4.2.4)$$

(ii) *Cota inferior cuando  $k = 2^n$ .*

Dada  $u_{2^n}$ , una autofunción asociada a  $\lambda_{2^n}$ , sabemos por el Teorema 2.57 que tiene  $2^n + 1$  ceros en  $[0, 1]$ , digamos  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{2^n} = 1$ .

Podemos escribir

$$[0, 1] = S_1[0, 1] \cup [r, 1 - r] \cup S_2[0, 1].$$

Ya que existe a lo sumo un cero en  $[r, 1 - r]$ , existe  $i_1 \in \{1, 2\}$  tal que  $I_1 = S_{i_1}[0, 1]$  contiene al menos  $2^{n-1}$  ceros.

Iteramos este argumento, y usando que a lo sumo un cero pertenece a  $I_1 \setminus (S_1(I_1) \cup S_2(I_1))$ , existe  $i_2 \in \{1, 2\}$  tal que  $I_2 = S_{i_2}(I_1)$  contiene al menos  $2^{n-2}$  ceros.

Entonces, obtenemos inductivamente que existen

$$I_{n-1} = S_{i_{n-1}}(I_{n-2}) = S_{i_{n-1}} \circ \dots \circ S_{i_1}[0, 1]$$

que contienen al menos 2 ceros de  $u_{2^n}$ .

Sean  $x_j$  y  $x_{j+1}$  los ceros de  $u_{2^n}$  en  $I_{n-1}$ . Como  $u_{2^n}$  resuelve

$$\begin{cases} -\Delta_{\mu_r} u = \lambda_{2^n} u_{2^n} \\ u(x_j) = 0 = u(x_{j+1}), \end{cases}$$

aplicando el Teorema 4.5 y la Observación 4.6, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{4}{x_{j+1} - x_j} &\leq \lambda_{2^n} \mu_r[x_{j+1} - x_j] \\ &\leq \lambda_{2^n} \mu_r[I_{n-1}].\end{aligned}$$

Usando que  $x_{j+1} - x_j \leq r^{n-1}$  y  $\mu_r[I_{n-1}] = 2^{-n+1}$ , obtenemos

$$4 \left( \frac{2}{r} \right)^{n-1} \leq \lambda_{2^n}.$$

Recordando que  $k = 2^n$ , tomando logaritmos y reordenando, tenemos

$$2rk^{\log(2/r)/\log(2)} \leq \lambda_k. \quad (4.2.5)$$

(iii) *Cotas para todo  $k$ .*

Dado  $\lambda_k$ , existe  $n$  tal que  $2^n \leq k < 2^{n+1}$ . Entonces, usando las cotas (4.2.4) y (4.2.5) tenemos

$$4 \left( \frac{2}{r} \right)^{n-1} \leq \lambda_k \leq \left( \frac{2}{r} \right)^{3+n}.$$

Finalmente, acotando  $n < \log(k)/\log(2) < n + 1$ , y reordenando, obtenemos

$$r^2 k^{\log(2/r)/\log(2)} \leq \lambda_k \leq \left( \frac{2}{r} \right)^3 k^{\log(2/r)/\log(2)}.$$

Y esto completa la demostración. ■

Usualmente, los autovalores de mayor orden son difíciles de estimar, incluso en el caso clásico, y las cotas se obtienen a partir del crecimiento de la función que cuenta los autovalores

$$N(\lambda) = \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\}.$$

Utilizando el Dirichlet-Neumann bracketing de Courant (ver [CH]) y el Renewal Theorem de Feller, Kigami y Lapidus en [KL] obtuvieron para esta función el orden asintótico tipo Weyl

$$0 < c \leq \frac{N(\lambda)}{\lambda^{d_s/2}} \leq C < \infty, \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow \infty,$$

donde  $d_s$  se conoce como la *dimensión espectral*, ver también [Ki01] para un estudio completo del problema. Se puede caracterizar a  $d_s$  como

$$d_s = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{2 \log(N(\lambda))}{\log(\lambda)},$$

siempre que el límite exista.

Las constantes  $c$  y  $C$  que aparecen no son ni cero ni infinito, pero demostrarlo requiere un trabajo muy delicado, ver [Ki01].

**Observación 4.12.** Notemos que del Teorema 4.11 puede deducirse fácilmente el orden asintótico de crecimiento de  $N(\lambda)$  con estimaciones precisas de las constantes  $c$  y  $C$ :

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\} \\ &\leq \#\left\{k : r^2 k^{\log(2/r)/\log(2)} \leq \lambda\right\} \\ &= \#\left\{k : k \leq \left(\frac{\lambda}{r^2}\right)^{\log(2)/\log(2/r)}\right\} \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{r^2}\right)^{\log(2)/\log(2/r)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \#\{k : \lambda_k \leq \lambda\} \\ &\geq \#\left\{k : \left(\frac{2}{r}\right)^3 k^{\log(2/r)/\log(2)} \leq \lambda\right\} \\ &= \#\left\{k : k \leq \left(\frac{r^3 \lambda}{2^3}\right)^{\log(2)/\log(2/r)}\right\} \\ &\geq \left(\frac{r^3 \lambda}{2^3}\right)^{\log(2)/\log(2/r)} - 1. \end{aligned}$$

Este es el primer ejemplo de Laplacianos fractales donde el orden de crecimiento asintótico de  $N(\lambda)$  se obtiene sin utilizar el Renewal Theorem.

**Observación 4.13.** Con pequeñas modificaciones, la misma prueba vale para otros casos:

1. Si  $\mu = q\mu_r$ , con  $q \in L^\infty([0, 1], \mu_r)$  y  $0 < c \leq q$  en  $[0, 1]$ , entonces

$$\|q\|_\infty^{-1} r^2 k^{\log(2/r)/\log(2)} \leq \lambda_k \leq c(\|q\|_{L^1_\mu}) r^{-n} \left(\frac{2}{r}\right)^3 k^{\log(2/r)/\log(2)}.$$

2. Dadas  $M$  similitudes  $\{S_i\}_{1 \leq i \leq M}$  sin solapamientos, y la misma tasa de contracción  $r \in (0, 1/M)$ , y una medida  $\mu$  que satisface

$$\mu(A) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mu \circ S_i^{-1}(A),$$

tenemos que

$$c_1 k^{\log(M/r)/\log(M)} \leq \lambda_k \leq c_2 k^{\log(M/r)/\log(M)}$$

para ciertas constantes positivas  $c_1, c_2$ .

3. Dadas  $M$  similitudes  $\{S_i\}_{1 \leq i \leq M}$  con tasas de contracción  $r_i$ , sin solapamientos, y un vector de probabilidades  $p_i$  tal que  $p_i r_i = 1/s$  para  $1 \leq i \leq M$ , y  $\mu$  que satisface

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^M p_i \mu \circ S_i^{-1}(A),$$

tenemos

$$c_1 k^{\log(s)/\log(M)} \leq \lambda_k \leq c_2 k^{\log(s)/\log(M)}$$

para ciertas constantes positivas  $c_1, c_2$ .

Nos queda pendiente si un argumento similar podría permitir conocer el comportamiento asintótico de los autovalores para medidas autosimilares arbitrarias sin la restricción  $p = 1/2$  y con diferentes tasas de contracción.

### 4.3. El caso $\mathbb{R}^N$

A continuación comentamos una reciente extensión de la desigualdad de Lyapunov a operadores  $p$ -Laplacianos en conjuntos  $N$ -dimensionales, donde se reemplaza la longitud del intervalo por el radio interior del dominio, en [dNP2]. La norma del peso depende de la relación entre  $p$  y  $N$ , y el caso  $p < N$  es más complicado y está relacionado a propiedades capacitarias de  $\Omega$ . Pinasco y De Napoli prueban el siguiente resultado.

**Teorema 4.14.** Sean  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  y  $p > N$ . Si existe una solución no trivial  $u$  de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \rho(x)|u|^{p-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces tenemos la desigualdad:

$$\frac{c}{r^{p-N}} \leq \|\rho\|_{L^1(\Omega)}, \quad (4.3.1)$$

donde  $c$  es una constante positiva, independiente de  $u$ , y  $r$  es el radio interior de  $\Omega$ ,

$$r = \max_{x \in \Omega} \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|.$$

**Demostración:** Tomamos el punto  $x \in \Omega$  tal que  $|u(x)|$  alcanza su máximo, y el  $y \in \partial\Omega$  más cercano. De la desigualdad de Morrey,

$$|u(x)| = |u(x) - u(y)| \leq M|x - y|^{1-N/p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Utilizando la formulación débil del problema,

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^p \right)^{1/p} = \left( \int_{\Omega} \rho(x)|u|^p \right)^{1/p} \leq |u(x)| \left( \int_{\hat{\omega}} \rho(x) \right)^{1/p}$$

tenemos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq M r^{1-N/p} \left( \int_{\Omega} \rho(x) \right)^{1/p} |u(x)| \\ 1 &\leq M r^{1-N/p} \|\rho\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{c}{r^{p-N}} \leq \|\rho\|_{L^1(\Omega)}.$$

■

**Observación 4.15.** Observemos que, para  $p = 2$ ,  $N = 1$  y  $|b - a| = r$ , recuperamos la desigualdad de Lyapunov clásica:

$$\frac{c}{r} \leq \|\rho\|_{L^1(\Omega)}$$

$$c \leq r \int_a^b \rho(x) dx.$$

Veamos una aplicación de este teorema, donde se combinan la desigualdad de Lyapunov anterior con la estructura autosimilar de  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $Q$  el cubo unitario en  $\mathbb{R}^n$  y el problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u & \text{en } Q \\ u = 0 & \text{en } \partial Q. \end{cases}$$

**Teorema 4.16.** Si  $N_D(\lambda)$  es la función que cuenta los autovalores Dirichlet, existe una constante positiva  $C$  tal que

$$N_D(\lambda) \leq C \lambda^{N/p}.$$

**Demostración:** Fijamos  $\lambda$  suficientemente grande, y dividimos  $Q = \bigcup_i Q_i$ , en cubos de lado  $r$ , con  $r = (a\lambda)^{-1/p}$ . Entonces, el Dirichlet-Neumann bracketing implica que

$$N_D(\lambda) \leq \sum_i N_N(\lambda, Q_i).$$

En cada cubo  $Q_i$  sólo el primer autovalor, que es cero, es menor que  $\lambda$ . Las autofunciones correspondientes a autovalores más altos cambian de signo, y si los reemplazamos en una desigualdad de tipo Lyapunov similar (siendo ahora  $r$  el diámetro del conjunto en lugar del radio interno), falla en satisfacer que

$$\frac{c}{r^{p-N}} \leq \lambda r^N$$

para ciertos valores de  $a$ . Por lo tanto,

$$\sum_i N_N(\lambda, Q_i) \leq \#\{Q_i\} = \left(\frac{1}{r}\right)^N.$$

Entonces,  $N_D \leq C \lambda^{N/p}$ . ■

Observemos que por la monotonía de los autovalores respecto a la inclusión de conjuntos, esta cota superior sirve para todo conjunto  $\Omega \subset Q$ .

Estas mismas ideas pueden generalizarse a Laplacianos fractales en más dimensiones, tales como los estudiados por Strichartz en el conjunto de Sierpinski, ver [Str]. No hemos incluido en esta tesis la demostración para no sobrecargar la notación y los resultados previos necesarios, si bien fue incluida en el poster [PSS5].

#### 4.4. Problema Inverso para $-\Delta_\mu$

En esta sección veremos como replicar las técnicas que utilizamos en el **Capítulo §3** para el caso del operador  $\Delta_\mu$  para el problema

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \lambda \rho(x)u & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (4.4.1)$$

##### 4.4.1. Concentración de ceros en $\text{sop}(\mu)$

Sea  $u_k$  una autofunción del problema (4.4.1), llamemos  $Z_k : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  a la función de distribución asintótica de ceros, es decir, la fracción del número de ceros en  $[0, x]$ ,

$$Z_k(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{\#\{\text{ceros de } u_k \text{ en } [0, x]\}}{k+1} & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Nuevamente consideramos la familia de medidas de probabilidad

$$dZ_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \delta_{x_j}$$

donde  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  son los ceros de  $u_k$ , y  $\delta_x$  es una delta Dirac centrada en  $x$ . Utilizando Prokhorov, podemos extraer una subsucesión de medidas que converja a alguna medida de probabilidad  $dZ$ , que llamaremos  $dZ^\mu$  siempre que necesitemos resaltar la dependencia de la medida. El primer resultado es el siguiente:

**Teorema 4.17.** *Existe una subsucesión de la familia de funciones  $\{Z_k\}_{k \geq 1}$  que converge puntualmente a una función  $Z : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ . Además, los ceros de las autofunciones se acumulan en  $\text{sop}(\mu)$ , en el sentido de que  $Z$  es constante en el complemento de  $\text{sop}(\mu)$ .*

**Demostración:** Por Helly, existe el límite igual que antes.

Sea  $(a, b) \subset \text{sop}(\mu)^c$ . Por el Lema 2.55,  $u_k$  es lineal en  $(a, b)$  y por lo tanto tiene a lo sumo un cero en este intervalo. Por la convergencia puntual,

$$\begin{aligned} Z_k(a) &\longrightarrow Z(a) \\ Z_k(b) &\longrightarrow Z(b). \end{aligned}$$

Entonces

$$Z_k(b) - Z_k(a) = \frac{\#\{\text{ceros de } u_k \text{ entre } a \text{ y } b\}}{k+1} = \frac{1}{k+1} \longrightarrow 0$$

Luego,  $Z(a) = Z(b)$  y por lo tanto  $Z$  es constante en  $\text{sop}(\mu)^c$ . ■

El siguiente ejemplo se debe a Freiberg y Löbus, ver [FL]:

**Ejemplo 4.18.** Sean  $\{u_k\}_{k \geq 1}$  las autofunciones de

$$-\Delta_\mu u = \lambda u$$

con condiciones de borde Dirichlet, donde  $\mu$  es la medida de Hausdorff  $d_H$ -dimensional asociada al conjunto ternario de Cantor en  $(0, 1)$ . Entonces, la función de distribución asintótica  $Z(x)$  es la función escalera de Cantor.

En el ejemplo anterior, todo punto del soporte de la medida es un punto de concentración. Esto parece estar relacionado con el hecho de que en ese caso  $\mu$  es la medida autosimilar asociada al conjunto de Cantor y entonces los ceros tienden a distribuirse uniformemente en este conjunto.

Para medidas generales, el siguiente ejemplo muestra que si  $Z$  es constante en un intervalo  $(c, d) \subset [0, 1]$ , eso no implica que  $(c, d) \subset \text{sop}(\mu)^c$ . Para verlo usaremos fuertemente el resultado de Kigami y Lapidus en [KL] sobre el crecimiento asintótico de la función que cuenta los autovalores.

**Ejemplo 4.19.** Consideremos el intervalo  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , y fijemos un elemento  $a \in [0, 1]$ . Sea  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ , donde  $\mu_1$  es una medida cuyo soporte es un conjunto tipo Cantor con dimensión espectral  $d_{S_1}$  en  $[0, a]$ , y  $\mu_2$  es una medida cuyo soporte es un conjunto tipo Cantor con dimensión espectral  $d_{S_2}$  en  $[a, 1]$ , de manera tal que  $d_{S_2} = \frac{1}{2}d_{S_1}$ . El número de autovalores menores a cierto  $\lambda$  es  $N(\lambda) = \#\{\lambda_k : \lambda_k < \lambda\}$ , y, en particular, por el Dirichlet-Neumann bracketing

$$N(\lambda, (0, 1)) \sim N(\lambda, (0, a)) + N(\lambda, (a, 1)) \sim x^{d_{S_1}/2} + x^{d_{S_2}/2} \sim x^{d_{S_1}/2}. \quad (4.4.3)$$

Por lo tanto, para  $\lambda = \lambda_k$  obtenemos que

$$k = N(\lambda_k) \sim \lambda_k^{d_{S_1}/2}.$$

Pero, sabemos que el número de ceros totales de  $u_k$  es  $k + 1$ , con lo cual

$$k \sim \lambda_k^{d_{S_1}/2}.$$

Ahora veamos como es el número de ceros de la autofunción del problema asociada a  $\lambda_k$  en  $(a, 1)$ . Para esto, consideremos el problema de autovalores

$$-\Delta_{\mu_2} u = \nu u \quad \text{en } [a, 1]$$

con  $u(a) = u(1) = 0$ . Tenemos que  $\lambda_k$  estará entre dos autovalores  $\nu_j, \nu_{j+1}$  de este problema, y sabemos que la autofunción asociada a  $\nu_j$  tiene  $j + 1$  ceros, y  $\nu_{j+1}$  tiene  $j + 2$ . Por el Teorema de Comparación de Sturm 2.60, la autofunción  $u_k$  tiene entre  $j$  y  $j + 2$  ceros, con lo cual, con el mismo argumento que antes,

$$j \sim \#\{\text{ceros de } u_k \text{ en } (a, 1)\} \sim \nu_j^{d_{S_2}/2}.$$

Comparando ambas expresiones, como  $\lambda_k \sim \nu_j$ , tenemos que

$$\begin{aligned} j^{2/d_{S_2}} &\sim \lambda_k \sim k^{2/d_{S_1}} \\ j &\sim k^{d_{S_2}/d_{S_1}} \\ j &\sim k^{1/2} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Por lo tanto, el número de ceros de  $u_k$  en  $(a, 1)$  es  $O(k^{1/2})$ , está acotado entre constantes por  $k^{1/2}$ . Entonces, tenemos que  $Z_k(a) = \#\{\text{ceros de } u_k \text{ en } (0, a)\}$ , puede calcularse como

$$Z_k(a) = \frac{\#\{\text{ceros de } u_k \text{ en } (0, 1)\} - \#\{\text{ceros de } u_k \text{ en } (a, 1)\}}{k+1} = \frac{k - O(\sqrt{k})}{k+1},$$

con lo cual  $Z_k(a) \rightarrow Z(a) = 1$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , y tenemos  $Z|(a, 1) \equiv 1$  pese a que  $(a, 1) \cap \text{sop}(\mu) \neq \emptyset$ .

Por lo tanto, si bien la densidad asintótica de ceros es nula en el complemento del soporte de la medida  $\mu$ , también puede serlo dentro del mismo. Probamos entonces el siguiente teorema:

**Teorema 4.20.** *Existen medidas no-atómica positivas  $\mu$  tal que  $\text{sop}(\mu)$  es un conjunto perfecto, y*

$$\{x \in \mathbb{R} : dZ(x) \equiv 0\} \cap \text{sop}(\mu) \neq \emptyset.$$

Queda claro que los ceros de las autofunciones se concentran en una parte de  $\text{sop}(\mu)$ , es decir que no todo punto del soporte de  $\mu$  es un punto de concentración. A pesar de eso, una cuestión interesante es determinar si estos son una parte sustancial del soporte o no.

#### 4.4.2. Análisis local

Como  $Z$  detecta solo una parte de  $\text{sop}(\mu)$ , para el problema de recuperar los puntos que omite necesitamos un estudio local.

**Definición 4.21.** Decimos que  $x$  es un *punto de concentración* de los ceros de autofunciones si  $Z(x + \varepsilon) - Z(x - \varepsilon) > 2$  para cualquier  $\varepsilon > 0$ .

Buscamos entonces recuperar conjuntos de dimensión menor a la del  $\text{sop}(\mu)$ , por ejemplo cuando  $\mu$  es la suma de dos medidas de dimensiones diferentes. Definamos también la siguiente medida local del número de ceros:

**Definición 4.22.** Dado  $x \in (a, b)$  y  $\varepsilon > 0$ , definimos

$$M_\varepsilon(x, k) = \#\{\text{ceros de } u_k \text{ en } (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\},$$

donde  $u_k$  es una autofunción asociada al autovalor  $\lambda_k$  del problema (4.4.1).

Veamos ahora que estas funciones locales  $M_\varepsilon$  son suficientes para detectar explícitamente  $\text{sop}(\mu)$ :

**Teorema 4.23.** *Si  $x_0 \in \text{sop}(\mu)^c$ , entonces para todo  $k$ , tenemos que*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M_\varepsilon(x_0, k) \leq 1.$$



**Demostración:** Dado  $x_0 \in \text{sop}(\mu)^c$ , y  $\varepsilon_0 < \text{dist}(x_0, \text{sop}(\mu))$ , por el Lema 2.55 sabemos que  $M_{\varepsilon_0}^+(x_0, k) \leq 1$  y el teorema queda probado. ■

Como la  $k$ -ésima autofunción del problema (4.4.1) tiene  $k + 1$  ceros en  $[0, 1]$ , la teoría de oscilación de Sturm-Liouville nos permite asegurar que:

**Teorema 4.24.** Si  $x_0 \in \text{sop}(\mu)$ , entonces para cualquier  $\varepsilon > 0$ , tenemos

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} M_\varepsilon(x_0, k) = +\infty.$$

**Demostración:** Si consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta_{\mu|_{(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)}} v = \lambda \rho(x)v & \text{en } (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \\ v(x_0 - \varepsilon) = v(x_0 + \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (4.4.5)$$

con la función  $\rho > 0$  en el intervalo  $[a, b]$ , entonces tiene autovalores  $\{\beta_k\}$  y la  $k$ -ésima autofunción tiene  $k + 1$  ceros en  $[a, b]$ . Luego, comparando este problema con (4.4.1), por propiedades de oscilación de Sturm-Liouville vale el resultado. ■

Por lo tanto, el análisis local nos dice que los ceros se concentran en todo el soporte de la medida, aunque el ejemplo anterior nos dice que lo hacen a distintas tasas, que dependerían de la dimensión local.

**Observación 4.25.** Conocidas las longitudes de los intervalos complementarios de un conjunto cerrado  $K$  en la recta, Besicovich y Taylor demostraron en [BeTa] que se tiene entonces la dimensión de Minkowski de  $K$ , y que la dimensión de Hausdorff está acotada entre cero y ésta.

### 4.4.3. Caracterización de la medida

La sección anterior nos dice que necesitamos todos los ceros de las autofunciones (o, al menos, de una subsucesión de las mismas) para caracterizar el soporte de una medida. Dadas dos medidas con el mismo soporte, nos podemos preguntar si es posible distinguirlas utilizando los ceros.

Veamos un ejemplo primero que nos permite caracterizarlas si tenemos dos medidas absolutamente continuas con una densidad continua.

Consideremos un conjunto autosimilar  $K \subset [0, 1]$  y  $\mu$  la medida asociada, y supongamos que estamos en el caso no aritmético del Renewal Theorem (ver [KL]), es decir  $N(\lambda) = c\lambda^{d_s/2} + o(\lambda^{d_s/2})$  para cierta constante positiva  $c$ . Sea  $\nu = \rho\mu$ , con  $\rho$  continua. Tenemos que los ceros de las autofunciones de  $-\Delta_\nu$  caracterizan de manera única a  $\rho$  sobre  $K_\mu$ .

Para esto, necesitamos un resultado auxiliar, y es que para este problema,

$$N_\nu(\lambda) = C \int_0^1 \rho^{d_s/2} d\mu \lambda^{d_s/2} + o(\lambda^{d_s/2}),$$

donde  $C$  es una constante.

Esbozcamos rápidamente la demostración. Tomando una partición de  $K_\mu$  en intervalos  $I_i$ , tenemos que los autovalores de

$$-\Delta_\nu u = \lambda u \quad \text{en } I_i$$

crecen de la forma

$$N(\lambda) = C_i \lambda^{d_s/2} + o(\lambda^{d_s/2}),$$

donde  $C_i$  escala linealmente con la medida del conjunto.

Ahora, con ideas similares a las del **Capítulo §3**, podemos acotar  $\rho$  por debajo con constantes  $\rho_i$  y tenemos que los autovalores de

$$-\Delta_\mu u = \psi \rho_i u, \quad \text{en } I_i$$

satisfacen

$$\psi_j = \lambda_j / \rho_i,$$

con lo cual

$$N(\lambda, I_i) = \#\{j : \psi_j < \lambda\} = \#\left\{\frac{\lambda_j}{\rho_i} \leq \lambda\right\} = C_i \rho_i^{d_s/2} \lambda^{d_s/2}.$$

Por el Dirichlet-Neumann bracketing

$$N(\lambda, [0, 1]) \geq \sum_i N(\lambda, I_i) = \lambda^{d_s/2} \sum_i C_i \rho_i^{d_s/2}$$

que converge cuando refinamos la partición a

$$N(\lambda, [0, 1]) \geq \sum_i N(\lambda, I_i) = c \lambda^{d_s/2} \int_0^1 \rho^{d_s/2} d\mu,$$

y tomando ahora cotas superiores de  $\rho$ , se prueba la otra desigualdad.

Luego, si dos pesos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  tienen los mismos ceros, dado un punto  $x_0$  en la clausura del soporte de  $\mu$  nos permite tomar pares de ceros consecutivos  $x_j^k, x_{j+1}^k$  de la autofunción  $u_k$ , y por la continuidad de  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , si  $\rho_1(x_0) \neq \rho_2(x_0)$ , el mismo razonamiento del Teorema 3.11 nos lleva a un absurdo.

**Observación 4.26.** En el caso aritmético del Renewal Theorem, como  $c_1 \lambda^{d_s/2} \leq N(\lambda) \leq c_2 \lambda^{d_s/2}$ , este argumento falla. Sin embargo, un argumento diferente permite caracterizar unívocamente el peso sin necesidad de conocer en detalle el comportamiento asintótico de los autovalores.

Intuitivamente, al cambiar un peso por otro, es posible que los autovalores de cada uno sean diferentes, pero normalizando las integrales de los pesos, si en una región uno es mayor al otro, habrá otra región donde estos papeles se invierten, y como el autovalor es el mismo, se llega a un absurdo.

Para concluir este capítulo, demostremos el siguiente resultado que incluso mejora parcialmente los resultados del caso clásico del **Capítulo §3**.

**Teorema 4.27.** Sea  $\mu$  una medida con soporte  $\text{sop}(\mu) \subset [0, 1]$ . Sean  $\rho_1$  y  $\rho_2$  funciones continuas tales que

$$\int_0^1 \rho_1(x) d\mu = \int_0^1 \rho_2(x) d\mu.$$

Si coinciden los ceros asociados a las autofunciones de los problemas

$$-\Delta_\mu u = \lambda \rho_i u \quad \text{en } [0, 1],$$

con alguna condición de borde homogénea, entonces  $\rho_1 \equiv \rho_2$ .

**Demostración:** Supongamos que existe  $y_1$  tal que  $\rho_1(y_1) > \rho_2(y_1)$ , la condición sobre las integrales y la continuidad implican que existe  $y_2$  tal que  $\rho_1(y_2) < \rho_2(y_2)$ , y que existen  $\varepsilon, \delta > 0$  tales que

$$\rho_1(x) - \rho_2(x) > \varepsilon \quad \text{en } [y_1, y_1 + \delta],$$

$$\rho_2(x) - \rho_1(x) > \varepsilon \quad \text{en } [y_2, y_2 + \delta].$$

Para  $n$  suficientemente grande existen dominios nodales

$$I_n^1 = [x_{k(n)}^n, x_{k(n)+1}^n] \subset [y_1, y_1 + \delta],$$

$$J_n^2 = [x_{h(n)}^n, x_{h(n)+1}^n] \subset [y_2, y_2 + \delta].$$

Ahora consideremos los siguientes problemas de autovalores,

$$\begin{cases} -\Delta_\mu u = \zeta^{(i)} \rho_i u, \\ u(x_{k(n)}^n) = u(x_{k(n)+1}^n) = 0 \end{cases} \quad (4.4.6)$$

$$\begin{cases} -\Delta_\mu v = \eta^{(i)} \rho_i v, \\ v(x_{h(n)}^n) = v(x_{h(n)+1}^n) = 0 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Los primeros autovalores  $\zeta_1^{(i)}$  y  $\eta_1^{(i)}$  coinciden con  $\lambda_n^{(i)}$ , pues la primera autofunción es la restricción de la  $n$ -ésima autofunción del problema original. Pero como en el primer problema  $\rho_1 > \rho_2$ , tenemos  $\zeta_1^{(1)} < \zeta_1^{(2)}$ , con lo cual  $\lambda_n^{(1)} < \lambda_n^{(2)}$ ; mientras que en el segundo problema, como  $\rho_1 < \rho_2$ , es  $\eta_1^{(1)} > \eta_1^{(2)}$ , y tenemos  $\lambda_n^{(1)} > \lambda_n^{(2)}$ , que contradice lo anterior.

Por lo tanto, no puede existir un punto donde los pesos difieran, y el teorema queda demostrado.

■

# 5

---

## Una cota geométrica para la dimensión espectral

La dimensión espectral es un parámetro extraño que aún no ha sido comprendido completamente. Ramal y Toulouse en [RT], y Given y Mandelbrot en [GM], conjeturaron que existe una relación entre la dimensión espectral, la dimensión Hausdorff  $d_H$  (cómo cambia el volumen respecto a cambios en la escala espacial de un conjunto) y la dimensión de paseo aleatorio  $d_w$  (la escala espacio-tiempo del proceso de difusión asociado a  $-\Delta_\mu$ ),

$$2d_H = d_s d_w.$$

Esta se conoce como *relación de Einstein*, para mas detalles puede consultarse el survey de Freiberg [Fr5].

Para convoluciones Bernoulli con  $0 < r < 1/2$ , y  $0 < p < 1$ , la dimensión espectral  $d_s$  satisface

$$(pr)^{d_s/2} + ((1-p)r)^{d_s/2} = 1. \quad (5.0.1)$$

Esta ecuación involucra las propiedades de escala geométricas del sistema iterado de funciones y la manera en que la medida  $\mu_{r,p}$  se espase sobre su soporte  $K_\mu$ . Por eso, las nociones usuales de dimensión fallan en reflejar ambos ingredientes, dado que las dimensiones Hausdorff, Minkowski y Packing se calculan utilizando sólo la distancia Euclidea y la medida Lebesgue de los cubrimientos asociados a  $K_\mu$ .

A continuación presentaremos una nueva dimensión para conjuntos contenidos en el soporte de una medida Borel positiva  $\mu$ . Mostraremos las propiedades que satisface esta dimensión, y la utilizaremos para acotar la dimensión espectral del operador  $\Delta_\mu$ .

Veremos que  $D_s^\mu$  se comporta como la dimensión Minkowski y no como la dimensión Hausdorff, y entonces los conjuntos numerables pueden tener dimensión positiva. Esto era de esperarse, ya que en los problemas de autovalores en conjuntos abiertos con bordes fractales, las cotas dependen de la dimensión Minkowski. Recordemos que la función que cuenta los autovalores  $N(\lambda)$  satisface

$$N(\lambda, \Omega) = N(\lambda, \Omega_1) + N(\lambda, \Omega_2) + O(1),$$

donde  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , y  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ . La división del conjunto  $\Omega$  es esencialmente finita, para evitar un crecimiento explosivo del término  $O(1)$ , y por eso las estimaciones se basan en cubrimientos finitos.

Sin embargo, el crecimiento asintótico de  $N(\lambda)$  se conoce sólo para conjuntos autosimilares y las medidas autosimilares, donde las dimensiones Hausdorff y Minkowski coinciden, dado que existe una división natural finita del conjunto. Esto sugiere que, tal vez, la relación Einstein vale con la dimensión Minkowski en lugar de la dimensión Hausdorff.

## 5.1. Otra noción de dimensión

Consideremos una medida Borel positiva  $\mu$  en la recta real, con soporte compacto  $K_\mu$ , y sea  $E$  un subconjunto compacto de  $K_\mu$ .

Introducimos las siguientes familias de cubrimientos de  $E$ ,

$$\mathcal{J}_n(E) = \left\{ \{J_i\}_{1 \leq i \leq n} : J_i = [a_i, b_i], a_i, b_i \in \bar{E}, \right. \\ \left. J_i \cap J_h = \emptyset \text{ o es un solo punto, y } E \subset \cup J_i \right\}.$$

**Definición 5.1.** Dada una medida Borel sin átomos  $\mu$  en la recta real, con soporte compacto  $K_\mu$ , definamos el funcional

$$f_n(\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{i=1}^n |J_i|^{-1},$$

y para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos el ínfimo de  $f_n$  sobre  $\mathcal{J}_n(E)$ ,

$$A_n(E) = \inf_{\{J_i\}_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{J}_n} \left\{ f_n(\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}) \right\}.$$

Definimos

$$D_s^\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log(n)}{\log(A_n(E))},$$

siempre que el límite existe.

Si  $E$  es finito, definimos  $D_s^\mu(E) = 0$ .

**Observación 5.2.** Del Lema 2.2, si  $K_\mu \subset (a, b)$ , tenemos

$$\sum_{i=1}^n |J_i|^{-1} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n |J_i|} \geq \frac{n^2}{b-a}.$$

Entonces,  $f_n(\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}) > 1$  para  $n$  suficientemente grande, y  $\log(A_n(E)) > 0$ .

**Observación 5.3.** Observemos que, para conjuntos finitos  $E = \{x_1, \dots, x_k\}$ , y  $n \geq k$ , estamos forzados a utilizar intervalos degenerados  $[x_i, x_i]$  en orden de satisfacer las condiciones impuestas sobre  $\mathcal{J}_n(E)$ . Por simplicidad, definimos directamente  $D_s^\mu(E) = 0$  si el conjunto  $E$  es finito.

Como  $D_s^\mu$  depende de una medida  $\mu$ , necesitamos modificar alguna de las propiedades que se detallaron en 2.20, como la invariancia geométrica o por deformaciones Lipschitz. En el caso Euclideo, la medida Lebesgue escala apropiadamente o es invariante ante tales transformaciones. Sin embargo, para una medida arbitraria  $\mu$ , necesitamos alguna condición adicional de compatibilidad sobre la transformación  $g$  para poder tener que  $g(E) \subset K_\mu$ .

**Teorema 5.4.**  $D_s^\mu$  satisface las condiciones (a)-(e) de la lista 2.20.

**Demostración:** Probemos cada uno de los items.

(a) *Monotonía:* Si  $E \subset F$ , entonces  $D_s^\mu(E) \leq D_s^\mu(F)$ .

Dado cualquier cubrimiento  $\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  con  $n$  intervalos, podemos construir un cubrimiento  $\{\tilde{J}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $F$  extendiendo los intervalos cuando sea necesario. Ahora

$$f_n(\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}) \geq f_n(\{\tilde{J}_i\}_{1 \leq i \leq n}),$$

y así  $A_n(E) \geq A_n(F)$ . Finalmente,

$$D_s^\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log(n)}{\log(A_n(E))} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log(n)}{\log(A_n(F))} = D_s^\mu(F).$$

(b) *Invariancia geométrica:* sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una simetría, una traslación o una dilatación. Entonces  $D_s^\mu(E) = D_s^\mu(g(E))$ , siempre que  $E, g(E) \subset K_\mu$ .

La invariancia se deduce de que las longitudes de los intervalos se modifican de acuerdo al factor de dilatación  $c$ , y no son afectadas por la traslación o la simetría, y  $\log(A_n(E)) = \log(A_n(g(E)) + \log(c)$ .

(c) *Deformaciones Lipschitz:* sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una transformación bi-Lipschitz. Entonces  $D_s^\mu(E) = D_s^\mu(g(E))$ , siempre que  $E, g(E) \subset K_\mu$ .

Sea  $g$  una función bi-Lipschitz, i.e.,

$$c_1|x - y| \leq |g(x) - g(y)| \leq c_2|x - y|.$$

Dado cualquier cubrimiento  $\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  donde  $J_i = [a_i, b_i]$ , construimos un cubrimiento  $\{\tilde{J}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  de  $g(E)$  donde  $\tilde{J}_i = [g(a_i), g(b_i)]$ . Entonces,

$$\frac{1}{c_1} f_n(\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}) \geq f_n(\{\tilde{J}_i\}_{1 \leq i \leq n}) \geq \frac{1}{c_2} f_n(\{J_i\}_{1 \leq i \leq n}),$$

y por lo tanto  $D_s^\mu(E) = D_s^\mu(g(E))$  como en (a).

(d) *Acotación:*  $0 \leq D_s^\mu(E) \leq 1$ .

De la Observación 5.2 tenemos que, para  $n$  suficientemente grande,

$$\frac{\log(A_n)}{2 \log(n)} \geq 1,$$

entonces obtenemos  $0 \leq D_s^\mu(E) \leq 1$ .

(e) *Conjuntos abiertos:* si  $U \subset E$  es un conjunto abierto, entonces  $D_s^\mu(E) = 1$ .

Asumamos que  $(a, b) \subset E$ . Ahora, de (a) y (d), es suficiente mostrar que  $D_s^\mu((a, b)) \geq 1$ . Para cada  $n \geq 2$ , tomamos un cubrimiento  $J^{(n)}$  con  $n$  intervalos consecutivos de longitud  $(b-a)/n$ , y entonces, por la desigualdad de las medias aritmética y armónica del Lema 2.2, tenemos  $n^2/(b-a) \geq A_n$ . Por lo tanto,

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log(n)}{\log(n^2) - \log(b-a)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log(n)}{\log(A_n)}.$$

El teorema está demostrado. ■

Por otro lado, mostraremos que  $D_s^\mu$  no verifica la  $\sigma$ -estabilidad y la discretitud. Por esto, podemos decir que  $D_s^\mu$  se comporta como la dimensión Minkowski en lugar de la Hausdorff, y conjuntos numerables pueden tener dimensión positiva.

**Lema 5.5.** *Dada una medida Borel  $\mu$  sin átomos, positiva, y cualquier conjunto  $E \subset K_\mu$ , tenemos  $D_s^\mu(E) = D_s^\mu(\bar{E})$ .*

**Demostración:** Alcanza con demostrar que las familias de cubrimientos  $\mathcal{J}_n(E)$  y  $\mathcal{J}_n(\bar{E})$  coinciden.

Claramente,  $\mathcal{J}_n(E) \subset \mathcal{J}_n(\bar{E})$ , ya que  $\cup_{i=1}^n J_i$  es un conjunto cerrado que cubre a  $E$ . Por otro lado, dado  $\{J_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{J}_n(\bar{E})$ , se tiene que  $J_i = [a_i, b_i]$  con  $a_i, b_i \in \bar{E}$ , y por eso es un cubrimiento admisible para  $E$ . ■

**Proposición 5.6.** *La dimensión  $D_s^\mu$  no satisface las condiciones de discretitud y  $\sigma$ -estabilidad.*

**Demostración:** Tomemos  $\mu = \mathcal{L}$ . Del Lema 5.5, si  $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  se tiene que  $\bar{E} = [0, 1]$ , y entonces  $D_s^\mu(E) = 1$ . Además, como  $E = \cup_{i \geq 1} \{q_i\}$ , para un número racional  $q_i \in [0, 1]$ , tenemos que  $D_s^\mu(\{q_i\}) = 0$ . ■

## 5.2. Una cota superior para la dimensión espectral

Finalmente, probamos en el siguiente teorema cómo es la relación de  $D_s^\mu$  con la dimensión espectral  $d_s$ .

**Teorema 5.7.** *Sea  $\mu$  una medida Borel, sin átomos y positiva, y  $d_s$  la dimensión espectral correspondiente a los autovalores de  $-\Delta_\mu$  en  $K_\mu$ . Entonces  $d_s \leq D_s^\mu(K_\mu)$ .*

**Demostración:**

Fijando  $\varepsilon > 0$ , existe algún  $n_0$  tal que

$$\log(n^{\frac{2}{D_s^\mu + \varepsilon}}) = \frac{2 \log(n)}{D_s^\mu + \varepsilon} \leq \log(A_n)$$

para cualquier  $n \geq n_0$ . Por lo tanto,

$$n^{\frac{2}{D_s^\mu + \varepsilon}} \leq A_n. \quad (5.2.1)$$

Ahora tomemos  $v_n$ , la  $n$ -ésima autofunción Neumann de  $-\Delta_\mu$  sobre  $[a, b]$ , y sean  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , los  $n + 1$  ceros de la derivada  $v_n'$  (si  $v_n$  es constante en algún intervalo, elegimos alguno de los extremos, que pertenecen a  $K_\mu$ ).

Si consideramos un cubrimiento  $J_n$  de  $K_\mu$  dado por  $J_i = [x_{i-1}, x_i]$  para  $1 \leq i \leq n$ . Tenemos que  $J_n \in \mathcal{J}_n$ , y aplicando la desigualdad tipo Lyapunov del Teorema 4.7, obtenemos

$$\sum_{i=1}^n \frac{4}{|J_i|} \leq \gamma_n^\mu \mu([a, b]).$$

Dado que  $\lambda_n^\mu \geq \gamma_n^\mu$ , y utilizando la desigualdad (5.2.1), nos queda que

$$n^{\frac{2}{D_s^\mu + \varepsilon}} \leq A_n(K_\mu) \leq \frac{\mu([a, b])}{4} \lambda_n^\mu.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} N(\lambda) &= \#\{n : \lambda_n^\mu \leq \lambda\} \\ &\leq \#\left\{n : \frac{4}{\mu([a, b])} n^{\frac{2}{D_s^\mu + \varepsilon}} \leq \lambda\right\} \\ &\leq \#\left\{n : n \leq \left(\frac{\mu([a, b])\lambda}{4}\right)^{\frac{D_s^\mu + \varepsilon}{2}}\right\} \\ &\leq C \lambda^{\frac{D_s^\mu + \varepsilon}{2}}, \end{aligned}$$

y como  $\varepsilon$  es un número positivo arbitrario, tenemos que  $d_s \leq D_s^\mu(K_\mu)$  y el resultado queda demostrado. ■



---

## Bibliografía

- [A] R. A. Adams. *Sobolev spaces* (Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975). Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. [25](#)
- [BeTa] A. S. Besicovitch and S. J. Taylor. *On the complementary intervals of a linear closed set of zero Lebesgue measure*. J. London Math. Soc., vol. 29 (1954), pp. 449–459. [67](#)
- [Bi] P. Billingsley. *Convergence of probability measures* (John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968). [26](#)
- [BNT] E. J. Bird, S.-M. Ngai and A. Teplyaev. *Fractal Laplacians on the unit interval*. Ann. Sci. Math. Québec, vol. 27 (2003), no. 2, pp. 135–168. [6](#), [27](#), [29](#), [30](#), [53](#)
- [BLS] M. S. Birman, A. Laptev and M. Solomyak. *On the eigenvalue behaviour for a class of differential operators on semiaxis*. Math. Nachr., vol. 195 (1998), pp. 17–46. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mana.19981950103>. [5](#), [44](#)
- [BS] M. S. Birman and M. Solomyak. *On the negative discrete spectrum of a periodic elliptic operator in a waveguide-type domain, perturbed by a decaying potential*. J. Anal. Math., vol. 83 (2001), pp. 337–391. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02790267>. [5](#), [43](#)
- [Bo] G. Borg. *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte*. Acta Math., vol. 78 (1946), pp. 1–96. [1](#)
- [Bo2] G. Borg. *On a Liapounoff criterion of stability*. Amer. J. Math., vol. 71 (1949), pp. 67–70. [53](#)
- [Br] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree] (Masson, Paris, 1983). Théorie et applications. [Theory and applications]. [24](#), [25](#)
- [CV] A. Cañada and S. Villegas. *A variational approach to Lyapunov type inequalities*. SpringerBriefs in Mathematics (Springer, Cham, 2015). URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-25289-6>. From ODEs to PDEs, With a foreword by Jean Mawhin. [53](#)

- [CC] R. S. Cantrell and C. Cosner. *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments. II*. SIAM J. Math. Anal., vol. 22 (1991), no. 4, pp. 1043–1064. URL <http://dx.doi.org/10.1137/0522068>. 4
- [CP] M. J. Castro and J. P. Pinasco. *An inequality for eigenvalues of quasilinear problems with monotonic weights*. Appl. Math. Lett., vol. 23 (2010), no. 11, pp. 1355–1360. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2010.06.031>. 35
- [CDW] P. D. Cha, C. L. Dym and W. C. Wong. *Identifying nodes and anti-nodes of complex structures with virtual elements*. Journal of sound and vibration, vol. 211 (1998), pp. 249–264. 2
- [Cha] K. Chadan and P. C. Sabatier. *Inverse problems in quantum scattering theory*. Texts and Monographs in Physics (Springer-Verlag, New York, 1989), 2nd ed. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-83317-5>. With a foreword by R. G. Newton. 5
- [ChNg] J. Chen and S.-M. Ngai. *Eigenvalues and eigenfunctions of one-dimensional fractal Laplacians defined by iterated function systems with overlaps*. J. Math. Anal. Appl., vol. 364 (2010), no. 1, pp. 222–241. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.009>. 6, 30, 53
- [Chl] E. Chladni. *Entdeckungen uber die Theorie des Klanges* (Bey Weidmanns erben und Reich, 1787). 2
- [Chl2] E. F. F. Chladni. (Public domain), via Wikimedia Commons. URL <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/77/Chladini.Diagrams.for.Quadratic.Plates.svg/256px-Chladini.Diagrams.for.Quadratic.Plates.png>. 2
- [CH] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. I* (Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953). 60
- [dNP1] P. L. De Nápoli and J. P. Pinasco. *Estimates for eigenvalues of quasilinear elliptic systems*. J. Differential Equations, vol. 227 (2006), no. 1, pp. 102–115. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2006.01.004>. 53
- [dNP2] P. L. de Nápoli and J. P. Pinasco. *Lyapunov-type inequalities for partial differential equations*. J. Funct. Anal., vol. 270 (2016), no. 6, pp. 1995–2018. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2016.01.006>. 53, 62
- [DdPM] M. del Pino, P. Drábek and R. Manásevich. *The Fredholm alternative at the first eigenvalue for the one-dimensional  $p$ -Laplacian*. J. Differential Equations, vol. 151 (1999), no. 2, pp. 386–419. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.1998.3506>. 35
- [DeNg] D.-W. Deng and S.-M. Ngai. *Eigenvalue estimates for Laplacians on measure spaces*. J. Funct. Anal., vol. 268 (2015), no. 8, pp. 2231–2260. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2014.12.019>. 6, 30, 53, 54, 56

- [DM] M. Dilena and A. Morassi. *Identification of crack location in vibrating beams from changes in node positions*. Journal of Sound and Vibration, (2002), no. 255, pp. 915–930. 2
- [DR] O. Došlý and P. Řehák. *Half-linear differential equations, North-Holland Mathematics Studies*, vol. 202 (Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2005). 33
- [DMK] H. Dym and H. P. McKean. *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem* (Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1976). Probability and Mathematical Statistics, Vol. 31. 5
- [EK] J. Eckhardt and A. Kostenko. *The inverse spectral problem for indefinite strings*. Preprint to appear (?), (2014). 4
- [EG] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Textbooks in Mathematics (CRC Press, Boca Raton, FL, 2015), revised ed. 10, 13, 20, 21, 25
- [Fal01] K. Falconer. *The geometry of fractal sets, Cambridge Tracts in Mathematics*, vol. 85 (Cambridge University Press, Cambridge, 1986). 9, 10, 12, 20
- [Fal02] K. Falconer. *Techniques in fractal geometry* (John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997). 9, 12
- [Fal03] K. Falconer. *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications* (John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003), 2nd ed. URL <http://dx.doi.org/10.1002/0470013850>. 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
- [Far] M. Faraday. *On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by a group of particles upon vibrating elastic surfaces*. Philosophical Transactions of the Royal Society (London), (1831), no. 121, pp. 299–318. 2
- [Fed] H. Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 (Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969). 9
- [Fe] W. Feller. *The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension*. Ann. of Math. (2), vol. 60 (1954), pp. 417–436. 5
- [FBP] J. Fernández Bonder and J. P. Pinasco. *Asymptotic behavior of the eigenvalues of the one-dimensional weighted  $p$ -Laplace operator*. Ark. Mat., vol. 41 (2003), no. 2, pp. 267–280. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02390815>. 35, 40
- [FBPS] J. Fernandez Bonder, J. P. Pinasco and A. M. Salort. *A Lyapunov type inequality for indefinite weights and eigenvalue homogenization*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 144 (2015), no. 4, pp. 1669–1680. URL <http://dx.doi.org/10.1090/proc/12871>. 53

- [Fr01] U. Freiberg. *Analytical properties of measure geometric Krein-Feller-operators on the real line*. Math. Nachr., vol. 260 (2003), pp. 34–47. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mana.200310102>. 27, 28
- [Fr04] U. Freiberg. *Dirichlet forms on fractal subsets of the real line*. Real Anal. Exchange, vol. 30 (2004/05), no. 2, pp. 589–603. URL <http://projecteuclid.org/euclid.rae/1129416467>. 27
- [FL] U. Freiberg and J.-U. Löbus. *Zeros of eigenfunctions of a class of generalized second order differential operators on the Cantor set*. Math. Nachr., vol. 265 (2004), pp. 3–14. URL <http://dx.doi.org/10.1002/mana.200310133>. 6, 29, 64
- [Fr5] U. R. Freiberg. *Einstein relation on fractal objects*. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, vol. 17 (2012), no. 2, pp. 509–525. URL <http://dx.doi.org/10.3934/dcdsb.2012.17.509>. 70
- [FY] G. Freiling and V. Yurko. *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications* (Nova Science Publishers, Inc., Huntington, NY, 2001). 5
- [GL] I. M. Gel'fand and B. M. Levitan. *On the determination of a differential equation from its spectral function*. Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 1 (1955), pp. 253–304. 1
- [GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics (Springer-Verlag, Berlin, 2001). Reprint of the 1998 edition. 24
- [GM] J. A. Given and B. B. Mandelbrot. *Diffusion on fractal lattices and the fractal Einstein relation*. J. Phys. A, vol. 16 (1983), no. 15, pp. L565–L569. URL <http://stacks.iop.org/0305-4470/16/L565>. 70
- [Glad] G. M. L. Gladwell. *Inverse problems in vibration, Solid Mechanics and its Applications*, vol. 119 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004), 2nd ed. 2
- [GW] Y. Guo and G. Wei. *Inverse problems: dense nodal subset on an interior subinterval*. J. Differential Equations, vol. 255 (2013), no. 7, pp. 2002–2017. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2013.06.006>. 51
- [Ha] C.-W. Ha. *Eigenvalues of a Sturm-Liouville problem and inequalities of Lyapunov type*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 126 (1998), no. 12, pp. 3507–3511. URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-98-05010-2>. 53
- [HMcl] O. H. Hald and J. R. McLaughlin. *Solutions of inverse nodal problems*. Inverse Problems, vol. 5 (1989), no. 3, pp. 307–347. URL <http://stacks.iop.org/0266-5611/5/307>. 3, 51
- [HMcl2] O. H. Hald and J. R. McLaughlin. *Inverse problems: recovery of BV coefficients from nodes*. Inverse Problems, vol. 14 (1998), no. 2, pp. 245–273. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/14/2/003>. 2, 3, 31, 38, 41, 51

- [Har] B. J. Harris. *On an inequality of Lyapunov for disfocality*. J. Math. Anal. Appl., vol. 146 (1990), no. 2, pp. 495–500. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X\(90\)90319-B](http://dx.doi.org/10.1016/0022-247X(90)90319-B). 53
- [HK] B. J. Harris and Q. Kong. *On the oscillation of differential equations with an oscillatory coefficient*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 347 (1995), no. 5, pp. 1831–1839. URL <http://dx.doi.org/10.2307/2154978>. 53
- [HW] P. Hartman and A. Wintner. *On an oscillation criterion of Liapounoff*. Amer. J. Math., vol. 73 (1951), pp. 885–890. 53
- [Hi] E. Hille. *An application of Prüfer's method to a singular boundary value problem*. Math. Z., vol. 72 (1959/1960), pp. 95–106. 5, 43, 44
- [I] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations* (Dover Publications, New York, 1944). 40
- [Ki01] J. Kigami. *Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 335 (1993), no. 2, pp. 721–755. URL <http://dx.doi.org/10.2307/2154402>. 6, 30, 60
- [Ki02] J. Kigami. *Laplacians on self-similar sets and their spectral distributions*. Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, (1996), no. 938, pp. 133–148. Low-dimensional dynamical systems and related topics (Japanese) (Kyoto, 1995). 6, 30
- [KL] J. Kigami and M. L. Lapidus. *Weyl's problem for the spectral distribution of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals*. Comm. Math. Phys., vol. 158 (1993), no. 1, pp. 93–125. URL <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1104254132>. 6, 30, 60, 65, 67
- [KoFo] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomīn. *Introductory real analysis* (Dover Publications, Inc., New York, 1975). Translated from the second Russian edition and edited by Richard A. Silverman, Corrected reprinting. 22
- [Kr] M. G. Krein. *On certain problems on the maximum and minimum of characteristic values and on the Lyapunov zones of stability*. Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 1 (1955), pp. 163–187. 5, 53
- [KN] T. Kusano and M. Naito. *On the number of zeros of nonoscillatory solutions to half-linear ordinary differential equations involving a parameter*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 354 (2002), no. 12, pp. 4751–4767 (electronic). URL <http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03079-9>. 43
- [LaY] C. K. Law and C.-F. Yang. *Reconstructing the potential function and its derivatives using nodal data*. Inverse Problems, vol. 14 (1998), no. 2, pp. 299–312. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0266-5611/14/2/006>. Addendum 14 (1998) 779–780. 51

- [LoY] Y. Lou and E. Yanagida. *Minimization of the principal eigenvalue for an elliptic boundary value problem with indefinite weight, and applications to population dynamics*. Japan J. Indust. Appl. Math., vol. 23 (2006), no. 3, pp. 275–292. URL <http://projecteuclid.org/euclid.jjiam/1197390801>. 4
- [MF] A. Martínez-Finkelshtein, P. Martínez-González and A. Zarzo. *WKB approach to zero distribution of solutions of linear second order differential equations*. J. Comput. Appl. Math., vol. 145 (2002), no. 1, pp. 167–182. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427\(01\)00542-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0377-0427(01)00542-8). 3
- [Ma] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 44 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995). URL <http://dx.doi.org/10.1017/CB09780511623813>. Fractals and rectifiability. 9, 20
- [Mc] J. R. McLaughlin. *Inverse spectral theory using nodal points as data—a uniqueness result*. J. Differential Equations, vol. 73 (1988), no. 2, pp. 354–362. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396\(88\)90111-8](http://dx.doi.org/10.1016/0022-0396(88)90111-8). 3, 51
- [NS] K. Naimark and M. Solomyak. *Regular and pathological eigenvalue behavior for the equation  $-\lambda u'' = Vu$  on the semi-axis*. J. Funct. Anal., vol. 151 (1997), no. 2, pp. 504–530. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jfan.1997.3149>. 5, 44
- [Ng] S.-M. Ngai. *Spectral asymptotics of Laplacians associated with one-dimensional iterated function systems with overlaps*. Canad. J. Math., vol. 63 (2011), no. 3, pp. 648–688. URL <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-2011-011-3>. 53
- [PSS] Y. Peres, W. Schlag and B. Solomyak. *Sixty years of Bernoulli convolutions*. In *Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998)*, Progr. Probab., vol. 46, pp. 39–65 (Birkhäuser, Basel, 2000). 20
- [Pi01] J. P. Pinasco. *Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional  $p$ -Laplacian*. Abstr. Appl. Anal., (2004), no. 2, pp. 147–153. URL <http://dx.doi.org/10.1155/S108533750431002X>. 6, 35, 43, 44, 53
- [Pi] J. P. Pinasco. *Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional  $p$ -Laplacian*. Abstr. Appl. Anal., (2004), no. 2, pp. 147–153. URL <http://dx.doi.org/10.1155/S108533750431002X>. 53
- [PS1] J. P. Pinasco and C. Scarola. *Density of zeros of eigenfunctions of Sturm-Liouville problems*. Matemática Aplicada, Computacional e Industrial, (2013), pp. 129–132. 7
- [PS2] J. P. Pinasco and C. Scarola. *Lyapunov inequalities on fractals*. Multifractal Analysis: From Theory to Applications and Back, Banff, (2014). 7
- [PS3] J. P. Pinasco and C. Scarola. *A nodal inverse problem for second order Sturm-Liouville operators with indefinite weights*. Appl. Math. Comput., vol. 256 (2015), pp. 819–830. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.101>. 7

- [PS5] J. P. Pinasco and C. Scarola. *Geometric bounds for the spectral dimension and lyapunov-type inequalities for fractal laplacians*. (2016). Enviado para su publicación, en referato. [7](#), [63](#)
- [PS4] J. P. Pinasco and C. Scarola. *A nodal inverse problem for a quasi-linear ordinary differential equation in the half-line*. *J. Differential Equations*, vol. 261 (2016), no. 2, pp. 1000–1016. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2016.03.031>. [7](#)
- [Pr] Y. V. Prohorov. *Convergence of random processes and limit theorems in probability theory*. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, vol. 1 (1956), pp. 177–238. [26](#)
- [RT] R. Rammal and G. Toulouse. *Random walks on fractal structures and percolation clusters*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 44 (1983), no. 1, pp. 13–22. [70](#)
- [Rog] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge Mathematical Library (Cambridge University Press, Cambridge, 1998). Reprint of the 1970 original, With a foreword by K. J. Falconer. [12](#)
- [Ru] W. Rudin. *Real and complex analysis* (McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1974), 2nd ed. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. [23](#)
- [Sh] C. L. Shen. *On the nodal sets of the eigenfunctions of the string equation*. *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 19 (1988), no. 6, pp. 1419–1424. URL <http://dx.doi.org/10.1137/0519104>. [3](#)
- [ST] C. L. Shen and T. M. Tsai. *On a uniform approximation of the density function of a string equation using eigenvalues and nodal points and some related inverse nodal problems*. *Inverse Problems*, vol. 11 (1995), no. 5, pp. 1113–1123. URL <http://stacks.iop.org/0266-5611/11/1113>. [3](#), [39](#)
- [Str] R. S. Strichartz. *Differential equations on fractals* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2006). A tutorial. [63](#)